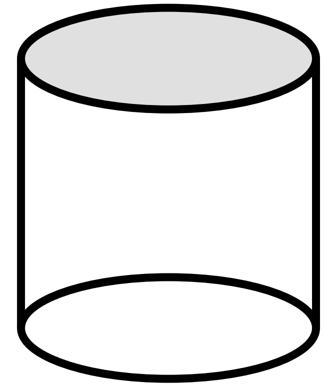


シュレディンガー汎関数法
Schroedinger functional

武田　真滋

金沢大学

CCS Advanced Summer School on Lattice Gauge theory

2015.8.26

講義の目標

この講義が終わった後すぐに何かの計算ができるという訳ではないが、将来どこかで誰かのトークで「何々をSFで計算しました」と聞いた時に、ああやって計算したんだなとイメージをもてるようになることを目標とする

講義の内容

1. Schroedinger functional (SF) の基礎
   - SF とは？
   - 定義・連続理論/格子上での定義・ゲージ場・フェルミオン場
2. 活用例：SFによる非摂動繰り込み
   - QCDのパラメーターや演算子の繰り込み
   - その有用性とこれまでの実績
   - O(a)改良の考え方
3. カイラルフェルミオンとSF

Review on SF

- Luesher, Lecture at the Les Houches Summar School (1997), arXiv:hep-lat/9802029
- Sommer, arXiv:hep-ph/9711243
- Sommer, arXiv:hep-lat/0611020 （最新？）

第1部：
SFの基礎

名前の起源

Symanzik NPB190(1981)1, Luescher NPB254(1985)52

- Symanzikが場の理論においてシュレディンガー表示が存在することを証明したのが始まり（くりこみ可能な理論ならOKらしい。。。）
- シュレディンガー方程式を満たす波動汎関数のことをシュレディンガー汎関数と呼んでいたみたい？

3+1次元　φ^{4}理論

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_t[A] = \mathbb{H}\psi_t[A]$$

$$\langle A|\psi\rangle = \psi[A]$$
$$\hat{\phi}(\mathbf{x})|A\rangle = A(\mathbf{x})|A\rangle$$
$$\hat{\pi}(\mathbf{x}) \leftrightarrow -i\frac{\delta}{\delta A(\mathbf{x})}$$

量子力学

$$\langle x|\psi\rangle$$
$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$$
$$\hat{p} \leftrightarrow -i\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\mathbb{H} = \int dx^3 \left[-\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\delta A\delta A} + \frac{1}{2}(\nabla A)^2 + \frac{1}{2}m^2A^2 + \frac{1}{4!}gA^4\right]$$

境界がある系の場の理論

- くりこみ可能性：　Symanzik NPB190(1981)1, Lattice 2015 Kennedy & Sint

  Q. 無限体積でくりこみ可能な理論（４次元）に対して、境界があった場合にもくりこみ可能性か？

  A. 境界面上の対称性を保つ演算子（次元≤3）をcounter term（表面項）として作用に加えればくりこみ可能になる（有限個のcounter term）

  ただし、証明があるのはスカラー理論のみ。フェルミオン・ゲージ理論の場合の厳密（摂動のすべての次数でという意味）な証明はない。でも、多分大丈夫だろう(Symanzik予想)

- 境界条件は作用に付け足す表面項の選び方によって決まる　⇒　第３部へ

境界がある系の場の理論

- QCDへの応用は考えてなかった模様

8.3. APPLICATIONS　　Symanzik NPB190(1981)1

We do not expect the results of this paper to have interesting applications in the conventional renormalizable theories, e.g. QED or QCD. Rather, our starting point was the lagrangian formulation of string theory [4] as an approximate model of

- String 理論や境界がある系の臨界現象に応用

Luescher NPB254(1985)52

$$\left\{\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}+\gamma(g)-\sigma(g)\int dx^3 A\frac{\delta}{\delta A}\right\}\psi[A]=0$$

ただし $m=0$

$\boxed{\begin{matrix}\sigma(g^*)\ \text{with}\\ \beta(g^*)=0\end{matrix}}$ $\Rightarrow$ New (surface) exponent

しかし、QCDでもSFが有用！

有限サイズスケーリングと組み合わせた非摂動繰り込みに便利

- massless直上での計算が可能(mass independent renormalizationの実現)
- 理想的な繰り込みスキームを定義できる
- それほど大きな格子サイズは必要ない
- 様々な系統誤差を制御しやすい
- 理論的に奇麗:ゲージ不変性を保てる

SFを勉強しよう！

YM理論のSFの定義

定義：状態Cから別の状態C’への遷移振幅

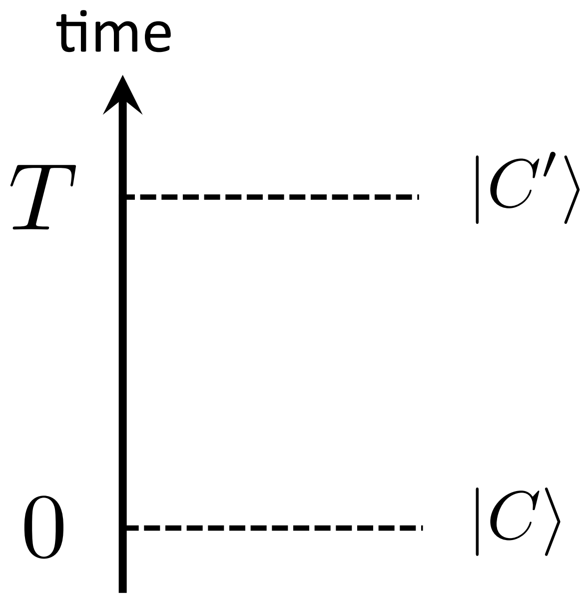
Luescher et al., NPB384(1992)168

$$\mathcal{Z}[C', C] = \langle C' | e^{-\mathbb{H}T} \mathbb{P} | C \rangle$$

古典ゲージ場配位

$$\hat{A}_k(\mathbf{x})|C\rangle = C_k(\mathbf{x})|C\rangle$$

ゲージ不変な状態への射影



C、C’のゲージ変換の下でSFをゲージ不変にするために必要

YM理論のSFの定義

定義：状態Cから別の状態C'への遷移振幅

Luescher et al., NPB384(1992)168

$$\mathcal{Z}[C',C] = \langle C'|e^{-\mathbb{H}T}\mathbb{P}|C\rangle$$

ゲージ不変なエネルギー固有状態の正規直交基底 $|\psi_n\rangle$
を使ってスペクトル表示すると

$$\mathcal{Z}[C',C] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n T}\psi_n[C']\psi_n[C]^*$$

これからこっちをSFと呼ぶ

ちょっと前までこれをSFと呼んでいたのだが。。。

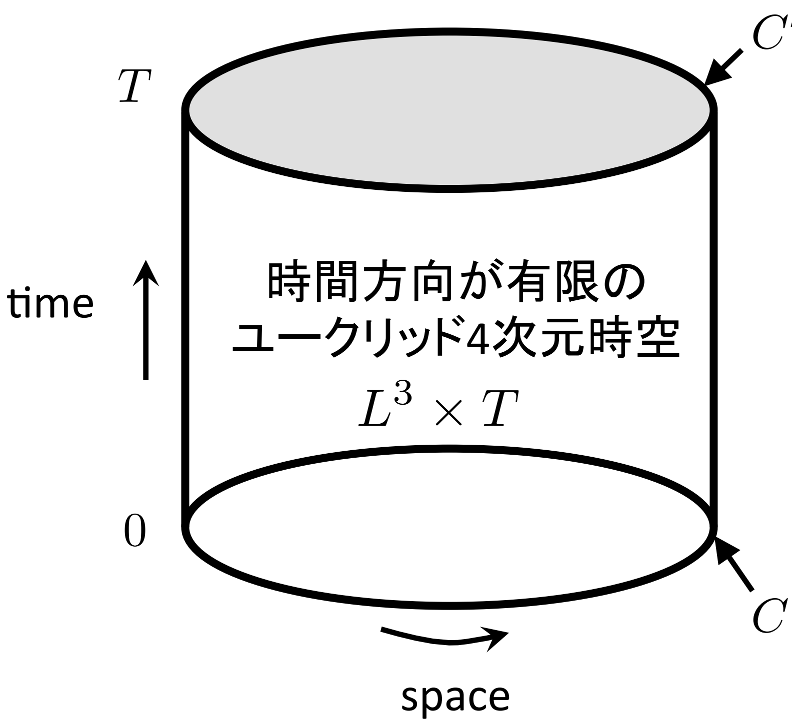
SFの経路積分表示（連続理論）

Luescher et al., NPB384(1992)168

$$\mathcal{Z}[C',C] = \int D[\Lambda]D[A]\exp\left(-S_{YM}[A]\right)$$

$\mathbb{P}$ の名残　$D[\Lambda] = \prod_{\mathbf{x}} d\Lambda(\mathbf{x}) \qquad \Lambda \in SU(N)$

$$D[A] = \prod_{0\le x_0\le T}\prod_{\mathbf{x}}\prod_{\mu}\prod_{a=1}^{N^2-1} dA_\mu^a(x)$$



ディリクレ型境界条件

$$A_k(x) = \begin{cases} C_k^\Lambda(\mathbf{x}) & \text{at } x_0 = 0 \\ C_k'(\mathbf{x}) & \text{at } x_0 = T \end{cases}$$

ただし、$C_k^\Lambda = \Lambda C_k \Lambda^{-1} + \Lambda\partial_k\Lambda^{-1}$

SFの経路積分表示

Luescher et al., NPB384(1992)168

$$\mathcal{Z}[C', C] = \int D[\Lambda] D[A] \exp\left(-S_{YM}[A]\right)$$

$\mathbb{P}$ の名残

$$D[\Lambda] = \prod_{\mathbf{x}} d\Lambda(\mathbf{x}) \qquad \Lambda \in SU(N)$$

$$D[A] = \prod_{0 \le x_0 \le T} \prod_{\mathbf{x}} \prod_{\mu} \prod_{a=1}^{N^2-1} dA_\mu^a(x)$$

境界場C,C'のゲージ変換Ωに対して不変

$$\mathcal{Z}[C'^{\Omega'}, C^{\Omega}] = \mathcal{Z}[C', C]$$

ディリクレ型境界条件

$$A_k(x) = \begin{cases} C_k^{\Lambda}(\mathbf{x}) & \text{at } x_0 = 0 \\ C'_k(\mathbf{x}) & \text{at } x_0 = T \end{cases}$$

A_0の境界条件は？
ゲージ固定によって決まる

ただし、$C_k^{\Lambda} = \Lambda C_k \Lambda^{-1} + \Lambda \partial_k \Lambda^{-1}$

次に、

- 形式的なSFの定義は与えられた
- ただし、YM理論のSFのくりこみ可能性は証明されていない
- 境界上の場で構成される、次元３以下のゲージ不変で且つ空間対称性を保つ演算子はない！
- よって（逆に言えば）、新しい発散は現れないだろう
- なので、結合定数の通常のくりこみさえやれば、多分くりこみ可能性は大丈夫だろう（Symanzik予想）
- SFのくりこみ可能性を確かめるべく、とりあえず、適当な正則化を使いSFを摂動展開して、1-loopでどうかをみてみる
- その摂動計算を始める前に、まず、、、、

背景場

Luescher et al., NPB384(1992)168

- 境界があるので、その境界条件を満たす解（古典解）があるはず
- 弱結合領域では作用の（絶対）最小値の近傍の配位が支配的となる
- 最小作用配位を探す、あるいは決めておく必要がある
- しかし、一般的に、ある境界条件（例C、C’）が与えられているとき、それを満たす解（背景場）を解析的に求めるのは難しい
- そこで論理をひっくり返して、まずある「解」をでっちあげ、それから境界条件を定義する
- 残された課題として、その「解」が一意的に（up to ゲージ変換）最小作用配位であることを示す必要あり

背景場(古典解)Bの例

Luescher et al., NPB384(1992)168

自己双対解

$$B_0(x) = 0 \qquad B_k(x) = \frac{I_k}{\tau - x_0}$$

$$[I_k, I_l] = \epsilon_{klj} I_j \qquad \tau < 0, \tau > T$$ 定数パラメーター

- 色電磁場(時間依存性あり)
- 摂動計算で使うこともある
- 最小作用配位の保証付き

Spatially constant abelian 解

$$B_0(x) = 0 \qquad B_k(x) = \frac{x_0 C'_k + (T - x_0) C_k}{T}$$

$$C_k = \frac{i}{L} \begin{bmatrix} \phi_{k1} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{k2} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{k3} \end{bmatrix}$$ for N=3

$$\phi_{k1} + \phi_{k2} + \phi_{k3} = 0$$

定数パラメーター

色荷コンデンサー

- 定色電場、色磁場ゼロ
- running couplingで使う
- 最小作用配位の保証付き

$$S[B] \le S[A]$$

摂動展開

- 次元正則化 4 → D=4-2ε
- 背景場があるため実空間でやる
- ゲージ場を背景場と量子揺らぎにわける

$$A_\mu(x) = B_\mu(x) + g_0 q_\mu(x)$$

- ゲージ固定：background gauge ➡ $D_0 q_0|_{x_0=0} = (\partial_0 q_0 + [B_0, q_0])|_{x_0=0} = 0$
- couplingで展開

q_0の境界条件が出る

$$\begin{aligned}\Gamma[B] &= -\ln \mathcal{Z}[C', C] \\ &= \frac{1}{g_0^2}\Gamma_0[B] + \Gamma_1[B] + g_0^2\Gamma_2[B] + \ldots\end{aligned}$$

- 1-loop contribution

$$\Gamma_1[B] = \frac{1}{2}\ln\det\hat{\Delta}_1 - \ln\det\hat{\Delta}_0$$

摂動展開

- heat kernel representation
- Seelery-DeWitt 展開

Luescher Ann.phys. 142,359(1982)

$$\Gamma_1[B] = \frac{1}{2}\ln\det\hat{\Delta}_1 - \ln\det\hat{\Delta}_0 = -\frac{1}{\epsilon}\frac{11N}{3(4\pi)^2}\Gamma_0[B] + O(1) + O(\epsilon)$$

$$g_0^2 = \mu^{2\epsilon} g_{\mathrm{MS}}^2(\mu)\left(1 - \frac{11}{3\epsilon}\frac{N}{16\pi^2}g_{\mathrm{MS}}^2(\mu) + \ldots\right)$$

$$\Gamma[B]_{D=4} = \frac{1}{g_{\mathrm{MS}}^2}\Gamma_0[B] - \frac{11}{3}\frac{N}{16\pi^2}\left(\ln 4\pi\mu^2 - \gamma_E + \frac{1}{11}\right)\Gamma_0[B] + O(g_{\mathrm{MS}}^2)$$

Symanzikの予想通り結合定数のくりこみだけでOK

格子上での定義

Transfer matrix

Luescher Com.math.phys.54 (1977) 283,
Sint NPB421 (1994) 135

$$\mathcal{Z}[C', C] = \langle W' | \mathbb{T}^T | W \rangle \qquad W = e^C$$

リンク変数

$$U(x, \mu)$$

格子上での定義

Luescher Com.math.phys.54 (1977) 283,
Sint NPB421 (1994) 135

Transfer matrix

$$\mathcal{Z}[C',C] = \langle W'|\mathbb{T}^T|W\rangle \qquad W = e^C$$

リンク変数
$U(x,\mu)$

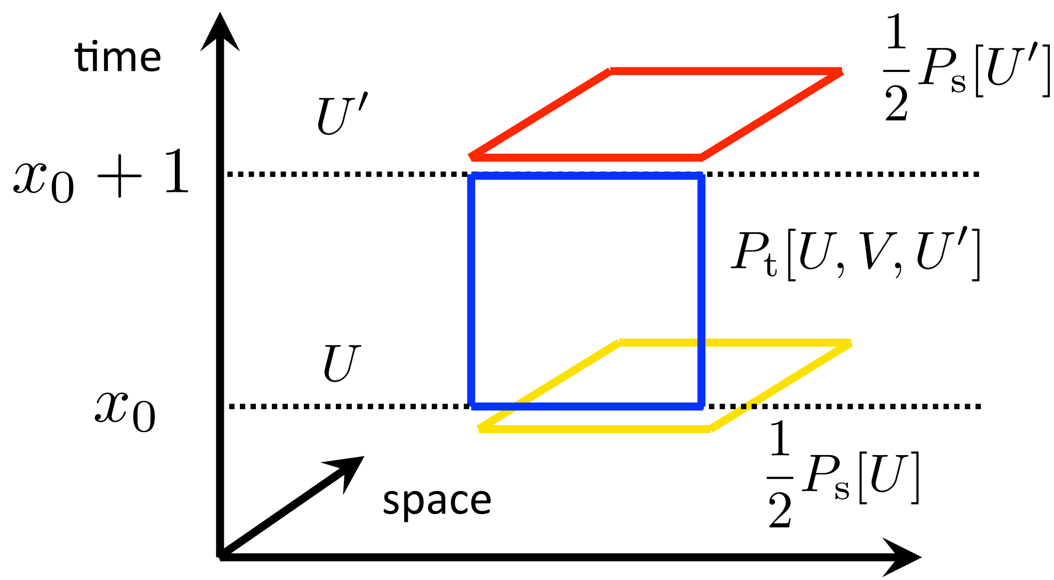
1ステップ進む時

x_0とx_0+1をつなぐリンク場（時間成分）

$$\langle U'|\mathbb{T}|U\rangle = \int D[V]\exp\left[\frac{1}{2}P_{\rm s}[U] + P_{\rm t}[U,V,U'] + \frac{1}{2}P_{\rm s}[U']\right]$$

x_0面上の
リンク場（空間成分）

x_0+1面上の
リンク場（空間成分）



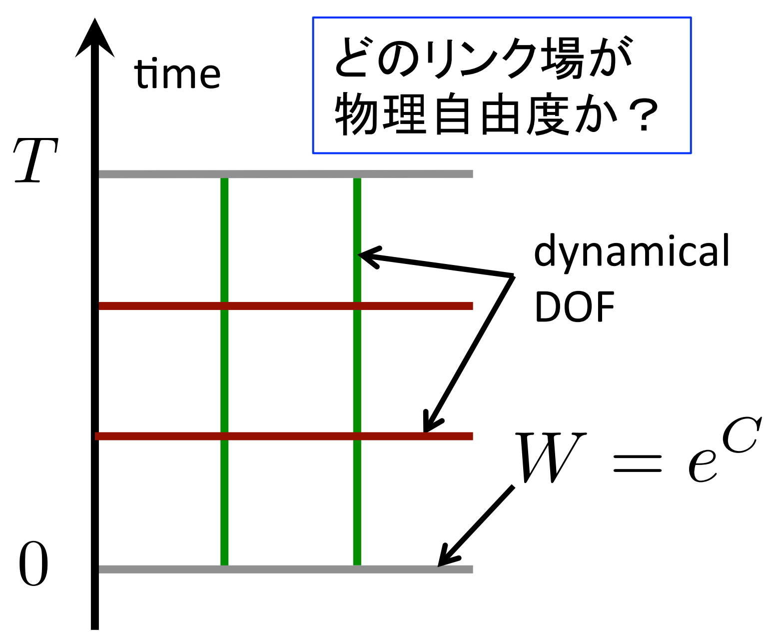
格子上での定義

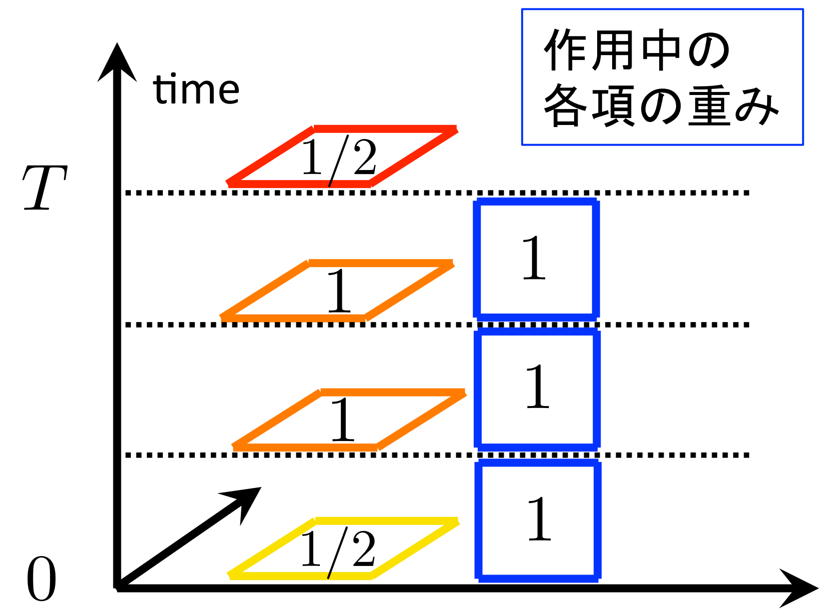
$$1 = \int \prod_{\mathbf{x},k} dU(\mathbf{x},k)|U\rangle\langle U|$$

を各time sliceに挿入すれば

リンク変数
$U(x,\mu)$

$$\mathcal{Z}[C',C] = \int \prod_{0\leq x_0<T} \prod_{\mathbf{x}} \underline{dU(x,0)} \prod_{0<x_0<T} \prod_{\mathbf{x},k} \underline{dU(x,k)} e^{-S_{\mathrm{YM}}^{\mathrm{lat}}}$$

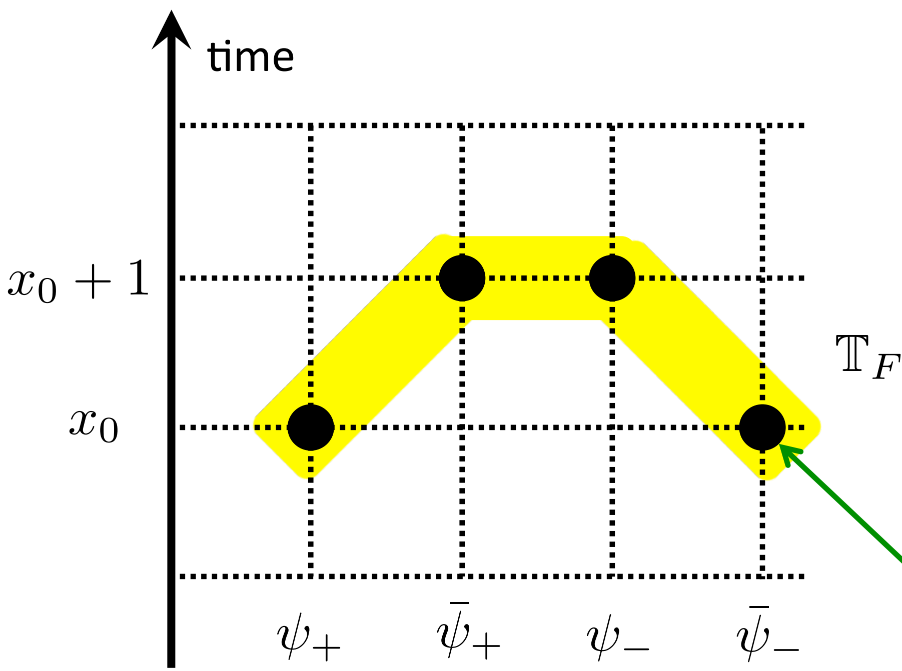




フェルミオン場

この場合もTransfer matrixで考える

Sint NPB421 (1994) 135



$$\psi_\pm = P_\pm \psi$$

$$\bar{\psi}_\pm = \bar{\psi} P_\pm$$

$$P_\pm = (1 \pm \gamma_0)/2$$

Wilson fermionの
transfer matrix

$$\langle \psi_+, \bar{\psi}_- | \mathbb{T}_F | \psi_-, \bar{\psi}_+ \rangle$$

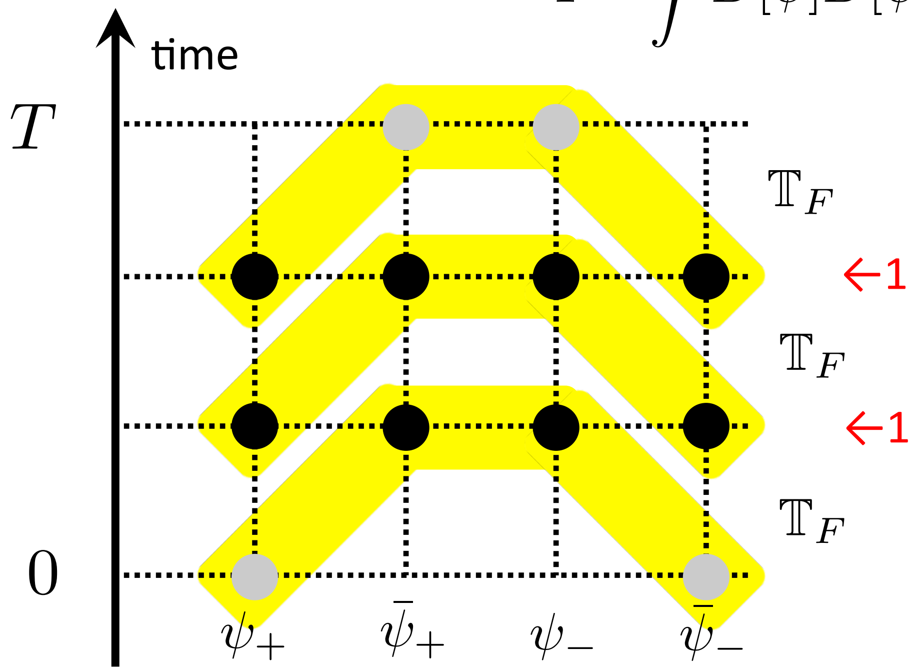
transfer matrixに
含まれているDOF

フェルミオン場

完全系を入れて、Transfer matrixを重ねる

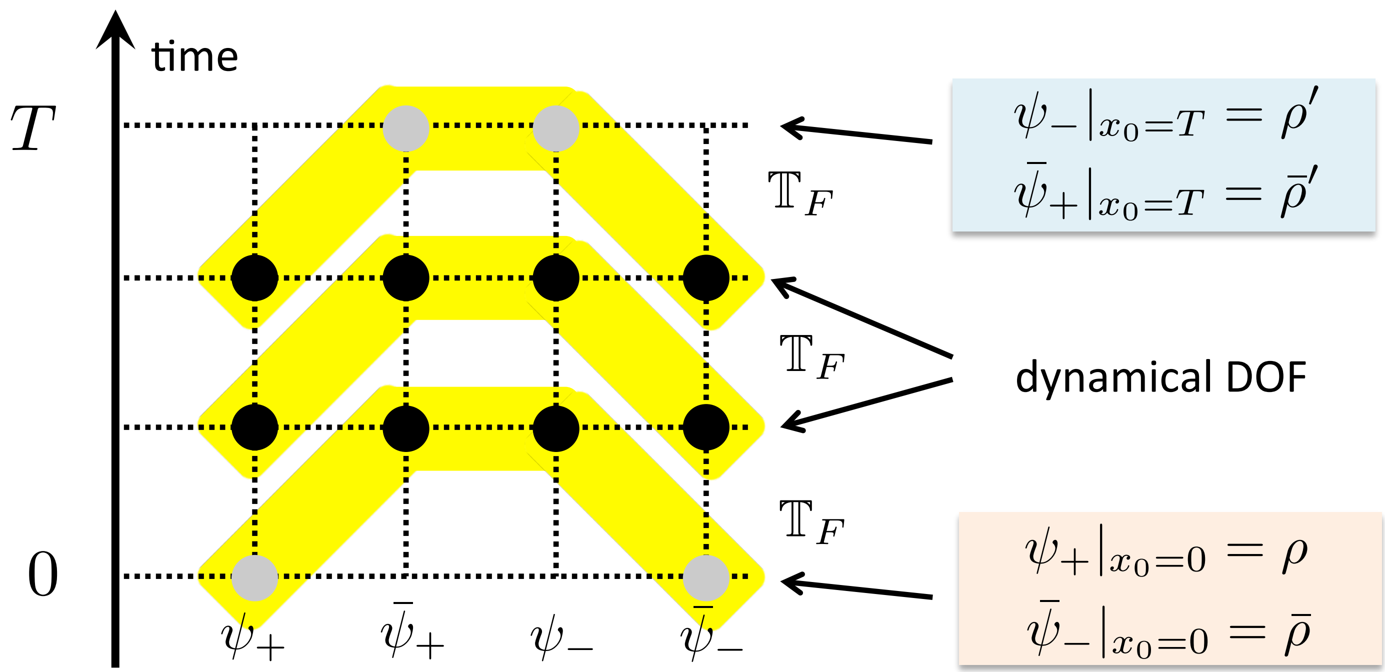
$$1 = \int D[\psi]D[\bar{\psi}] \exp\left[-\bar{\psi}\psi\right] |\psi_+, \bar{\psi}_-\rangle\langle\psi_-, \bar{\psi}_+|$$

質量項になる



フェルミオン場

作用の形は通常のままで、その中のフェルミオン場がdynamical OR 境界場かに気をつければよい



くりこみ可能性は？

Sint NPB451 (1995) 416

次元3でゲージ&時空対称性を満たすものが存在する

$$\bar{\psi}P_-\psi|_{x_0=0} \qquad \bar{\psi}P_+\psi|_{x_0=T}$$

よって、これらを作用に入れて、その共通の係数(1-Z_b)をcounter termとしてくりこみに使う。しかし、これらは結局、境界場の乗法的くりこみと等価である

$$\rho_R = Z_{\mathrm{b}}^{-1/2}\rho \qquad \rho'_R = Z_{\mathrm{b}}^{-1/2}\rho'$$

最終的に、SFはこれらのくりこみによって、有限になるSymanzikは正しかった(少なくとも1-loopまでは)。以後は、ρ=ρ’=0とするので、境界からの発散は気にしなくても良い

これで、一通りSFは定義できた。
次はその応用をみていく

第2部：
SFによる非摂動繰り込み

場の理論の手順

繰り込み可能なら

- 正則化する　⇒　cut offが現れる
- 有限のcut offだと、様々なものがきちんと計算できる
- 次に、cut off を飛ばした時に発散するものを取り除く＝くりこみ
- 最後に、cut offを飛ばし、物理量をくりこみまれたものだけで表す

「くりこみ」とは？ ただし、パラメータの

bare parameterを「物理的な」ものと置き換えること

- 摂動論のくりこみでは、bare parameterをrenormalized parameterに置き換えていた

$$g_0 \longrightarrow \bar{g}(\mu)$$

- Lattice QCDのハドロンスペクトルでは、ハドロン質量を再現するようにbare massを調節する

強い相互作用

- QCD : 強い相互作用を記述する理論
- エネルギー固有状態(ハドロン)と理論の物理自由度(クォーク・グルオン)が違う
- 低エネルギー(閉じ込め)と高エネルギー(漸近的自由)では振る舞いが異なる

Input

Lattice QCD

Output

陽子質量=938.272046(21)MeV

PDG 2013

$\alpha_s(m_Z)$=0.1185(6)

PDG 2013

QCDの基本パラメータ

繰り込まれたパラメータ

$$\bar{g}(\mu) \qquad \bar{m}_{\mathrm{u,d,s,\ldots}}(\mu)$$

スケールやスキームに依存する

繰り込み群不変な(RGI)パラメータ

$$\Lambda \qquad M_{\mathrm{u,d,s,\ldots}}$$

スケールやスキームに依存しない

注：Λはスキームに依存するがその比は1-loop exact

繰り込み群方程式

mass independent schemeの場合

$$\beta(\bar{g}) = \mu\frac{\partial\bar{g}}{\partial\mu} \qquad \tau(\bar{g})\bar{m}_f(\mu) = \mu\frac{\partial\bar{m}_f}{\partial\mu}$$

$$\beta(g) = -g^3\left(b_0 + b_1 g^2 + \ldots\right)$$

$$\tau(g) = -g^2\left(d_0 + d_1 g^2 + \ldots\right)$$

RGIの具体的な形

$$\Lambda = \mu(b_0\bar{g}^2)^{-b_1/2b_0^2}e^{-1/(2b_0\bar{g}^2)}\exp\left[-\int_0^{\bar{g}} dg\left(\frac{1}{\beta(g)}+\frac{1}{b_0 g^3}-\frac{b_1}{b_0^2 g}\right)\right]$$

$$M = \bar{m}(2b_0\bar{g}^2)^{-d_0/2b_0^2}\exp\left[-\int_0^{\bar{g}} dg\left(\frac{\tau(g)}{\beta(g)}-\frac{d_0}{b_0 g}\right)\right]$$

Λについてもう少し

$$\mu\frac{\partial\bar{g}}{\partial\mu} = \beta(\bar{g}) \xrightarrow{\text{区間積分}} \ln\frac{\mu}{\mu'} = \int_{\bar{g}(\mu')}^{\bar{g}(\mu)} \frac{dg}{\beta(g)}$$

ただし、この区間で
βにゼロ点なしと仮定

$$\beta(g) = -g^3\left[b_0 + b_1 g^2 + O(g^4)\right]$$

g=0でゼロ点あり

$$\frac{1}{\beta(g)} = -\frac{1}{b_0}\frac{1}{g^3} + \frac{b_1}{b_0^2}\frac{1}{g} + O(g)$$

$$R(g) = \frac{1}{\beta(g)} + \frac{1}{b_0}\frac{1}{g^3} - \frac{b_1}{b_0^2}\frac{1}{g}$$

g=0でもregular

$$\begin{aligned}\ln\frac{\mu}{\mu'} &= \int_{\bar{g}(\mu')}^{\bar{g}(\mu)}\left[R(g) - \frac{1}{b_0 g^3} + \frac{b_1}{b_0^2 g}\right]dg \\ &= \int_0^{\bar{g}(\mu)} R(g)dg + \underline{\int_{\bar{g}(\mu')}^{0} R(g)dg} + \left[\frac{1}{2b_0 g^2} + \frac{b_1}{2b_0^2}\ln g^2\right]_{\bar{g}^2(\mu')}^{\bar{g}^2(\mu)}\end{aligned}$$

Λへ

なぜ、非摂動くりこみが必要か？

$$\frac{\Lambda}{\mu} = (b_0\bar{g}^2)^{-b_1/2b_0^2} e^{-1/(2b_0\bar{g}^2)} \exp\left[-\int_0^{\bar{g}} dg \left(\frac{1}{\beta(g)} + \frac{1}{b_0 g^3} - \frac{b_1}{b_0^2 g}\right)\right]$$

最終的にlatticeで計算したいものは

$$\frac{\Lambda}{M_{\mathrm{p}}} = \frac{\Lambda}{\mu_{\mathrm{match}}} \cdot \frac{\mu_{\mathrm{match}}}{M_{\mathrm{p}}}$$

なぜ、非摂動くりこみが必要か？

$$\frac{\Lambda}{\mu} = (b_0\bar{g}^2)^{-b_1/2b_0^2} e^{-1/(2b_0\bar{g}^2)} \exp\left[-\int_0^{\bar{g}} dg \left(\frac{1}{\beta(g)} + \frac{1}{b_0 g^3} - \frac{b_1}{b_0^2 g}\right)\right]$$

最終的にlatticeで計算したいものは

$$\frac{\Lambda}{M_\mathrm{p}} = \frac{\Lambda}{\mu_\mathrm{match}} \cdot \frac{\mu_\mathrm{match}}{M_\mathrm{p}}$$

高エネルギーの方がよい
∵β関数の摂動展開が使える

$$\left.\frac{\mu_\mathrm{match}}{M_\mathrm{p}}\right|_\mathrm{lattice} = \left.\frac{\mu_\mathrm{match}}{M_\mathrm{p}}\right|_\mathrm{continuum} + O(a\mu_\mathrm{match})$$

連続極限を安全にとるためには $\mu_\mathrm{match} \ll a^{-1}$

⇒ 低エネルギーでmatchingせよ

なぜ、非摂動くりこみが必要か？

$$\frac{\Lambda}{\mu} = (b_0\bar{g}^2)^{-b_1/2b_0^2} e^{-1/(2b_0\bar{g}^2)} \exp\left[-\int_0^{\bar{g}} dg \left(\frac{1}{\beta(g)} + \frac{1}{b_0 g^3} - \frac{b_1}{b_0^2 g}\right)\right]$$

最終的にlatticeで計算したいものは

$$\frac{\Lambda}{M_{\rm p}} = \frac{\Lambda}{\mu_{\rm high}} \cdot \frac{\mu_{\rm high}}{\mu_{\rm low}} \cdot \frac{\mu_{\rm low}}{M_{\rm p}}$$

$\frac{\mu_{\rm low}}{M_{\rm p}}$ → ハドロンスペクトル

$\frac{\Lambda}{\mu_{\rm high}}$ → 上式で摂動計算

$\frac{\mu_{\rm high}}{\mu_{\rm low}}$ → 低エネルギーから高エネルギーまでの幅広い
領域の非摂動的なcouplingのrunningが必要

↓

あるスキームを定めてrunningを調べる
まずは、スキームから

理想的なスキーム

- 非摂動的に定義でき、連続極限も取れる
- ゲージ対称性を保つ
- mass independent schemeであること
- large scale problem：様々な系統誤差を制御できるか？

理想的なスキーム

- 非摂動的に定義でき、連続極限も取れる
- ゲージ対称性を保つ
- mass independent schemeであること
- large scale problem：様々な系統誤差を制御できるか？

伝統的なスキーム（Wilson loop）

$$\alpha_{q\bar{q}}(\mu) = \frac{3}{4} r^2 F(r), \quad \mu = 1/r$$

$$L \gg \frac{1}{m_\pi} = \frac{1}{0.14\mathrm{GeV}} \gg \frac{1}{\mu} = \frac{1}{10\mathrm{GeV}} \gg a \Rightarrow L/a \gg 70$$

巨大格子が必要！！！

有限サイズ効果

摂動展開

離散化誤差

理想的なスキーム

- 非摂動的に定義でき、連続極限も取れる
- ゲージ対称性を保つ
- mass independent schemeであること
- large scale problem：様々な系統誤差を制御できるか？

伝統的なスキーム（Wilson loop）

$$\alpha_{q\bar{q}}(\mu) = \frac{3}{4} r^2 F(r), \quad \mu = 1/r$$

$$L \gg \frac{1}{m_\pi} = \frac{1}{0.14\mathrm{GeV}} \gg \frac{1}{\mu} = \frac{1}{10\mathrm{GeV}} \gg a \quad \Rightarrow \quad L/a \gg 70$$

巨大格子が必要！！！

有限サイズ効果　摂動展開　離散化誤差

有限体積スキーム

有限サイズ効果と繰り込みスケール依存性を同一視

$$L = 1/\mu \quad \Rightarrow \quad L/a \gg 1$$

ゆるい制限で系統誤差を制御可能！

有限体積スキーム

例

- SFスキーム　これから見て行く
- twisted Polyakov loop　Divitiis et al.,NPB433,(1995)390=SU(2)YM　ALPHA,NPB437,(1995)447=SU(2)YM　Itoh,PTEP(2013)8,083B01=SU(3) with N_f
- Gradient flow coupling　Fodor,JHEP1211(2012)007　Fritzsch,JHEP1310(2013)008
- …

もっとディープな実用上の要請

- ある程度の摂動計算ができる e.g. 2,3-loopまで
- モンテカルロに適している。統計精度の問題
- 離散化誤差が小さい。連続極限が安全にとれるか

SFスキーム

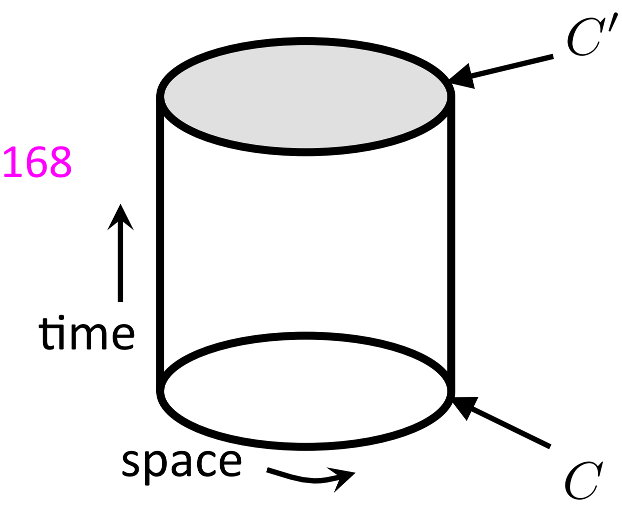
Schroedinger functional

Luescher et al., NPB384(1992)168

$$\mathcal{Z}[C,C'] = \int [dU d\bar{\psi} d\psi] e^{-S_{\rm QCD}}$$

$$U|_{x_0=0} = e^{C} \qquad \psi|_{x_0=0} = \psi_{x_0=T} = 0$$

$$U|_{x_0=T} = e^{C'} \qquad \bar{\psi}|_{x_0=0} = \bar{\psi}_{x_0=T} = 0$$



ディリクレBCの時、masslessでもディラック演算子の最小固有値は1/Tに比例する

Schroedinger functional coupling

at massless

$$\mu = 1/L = 1/T$$

すべてのスケールを一つに統一する

$$\bar{g}^2_{\rm SF}(L) = ({\rm normalization}) \left[\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \eta}\right]^{-1}$$

$$C = \frac{i}{L}\begin{bmatrix} \eta - \frac{\pi}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\eta & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\eta + \frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$$

- 規格化はtree levelで右辺がg_0^2となるようにする
- なぜ微分？　∵observableを出し、無限大定数を落とす
- 高精度可能。データの加工（フィットや外挿）の必要なし

結合定数の非摂動的発展

Luescher et al., NPB359(1991)221

Step scaling function (SSF)：離散的なスケール変化

$$\sigma(u) = \bar{g}^2(2L) \qquad u = \bar{g}^2(L) \qquad \mu = 1/L$$

⇔　β関数:無限小スケール変化

$$\beta(\bar{g}) = \mu \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mu}$$

結合定数の非摂動的発展

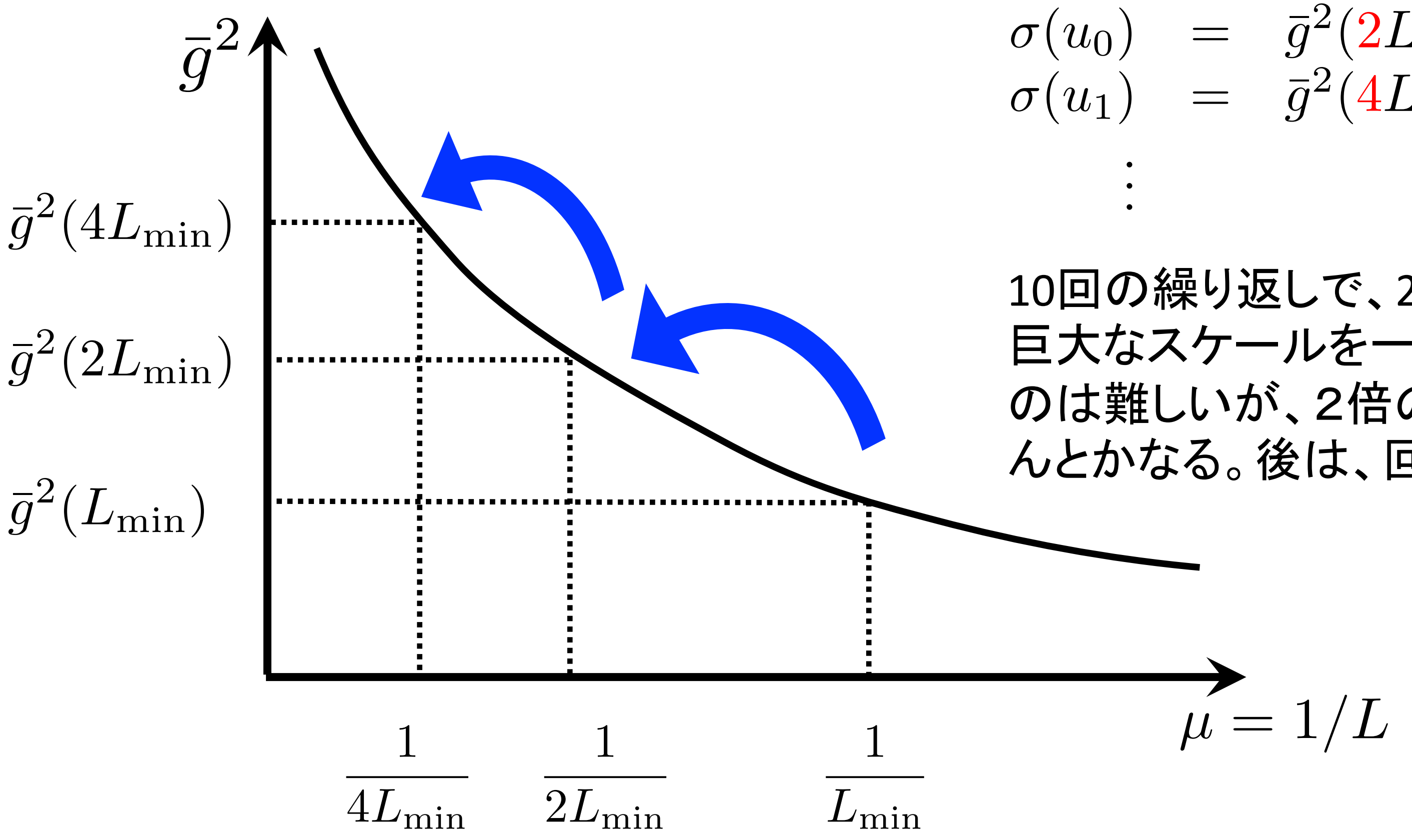
Luescher et al., NPB359(1991)221

Step scaling function (SSF)：離散的なスケール変化

$$\sigma(u) = \bar{g}^2(2L) \qquad u = \bar{g}^2(L)$$

$$\mu_{\mathrm{high}} = 1/L_{\mathrm{min}}$$

$$\begin{aligned} & & \bar{g}^2(\ L_{\mathrm{min}}) &= u_0 \\ \sigma(u_0) &= & \bar{g}^2(2L_{\mathrm{min}}) &= u_1 \\ \sigma(u_1) &= & \bar{g}^2(4L_{\mathrm{min}}) &= u_2 \\ & \vdots & & \end{aligned}$$



10回の繰り返しで、$2^{10} \simeq 1000$倍！！
巨大なスケールを一度でカバーするのは難しいが、2倍のスケールならなんとかなる。後は、回数を稼ぐ作戦

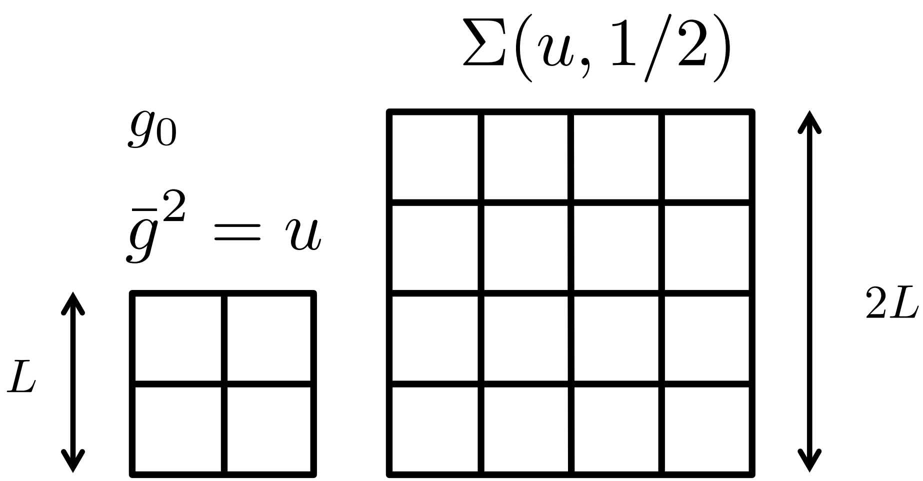
結合定数の非摂動的発展

Luescher et al., NPB359(1991)221

Step scaling function (SSF)：離散的なスケール変化

$$\sigma(u) = \bar{g}^2(2L) \qquad u = \bar{g}^2(L)$$

$\Sigma(u, a/L)$ 格子上のSSF



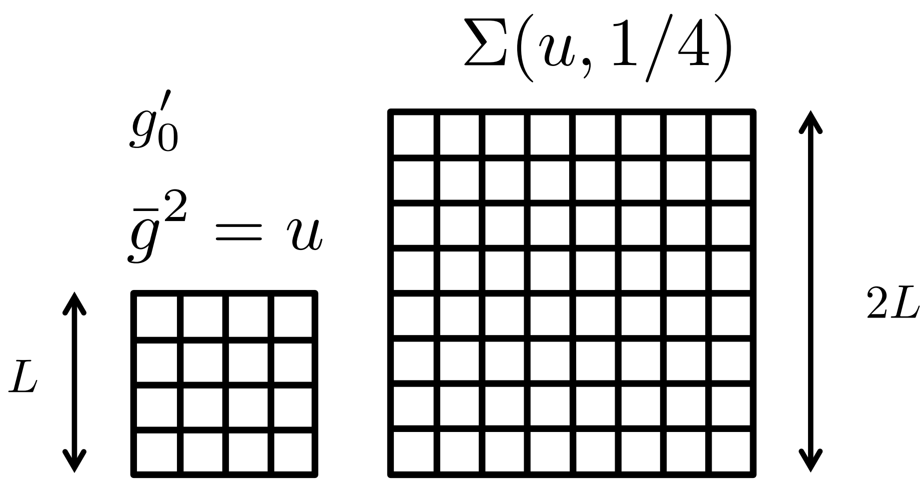
結合定数の非摂動的発展

Luescher et al., NPB359(1991)221

Step scaling function (SSF)：離散的なスケール変化

$$\sigma(u) = \bar{g}^2(2L) \qquad\qquad u = \bar{g}^2(L)$$

$\Sigma(u, a/L)$ 格子上のSSF



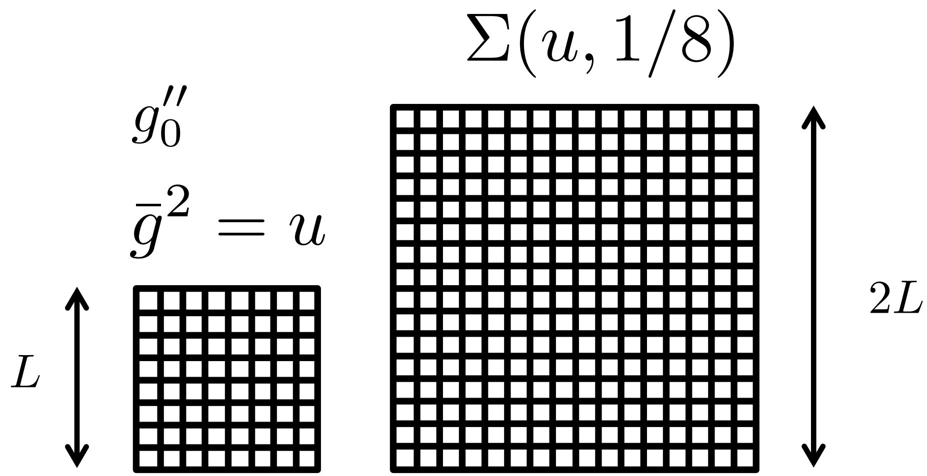
結合定数の非摂動的発展

Luescher et al., NPB359(1991)221

Step scaling function (SSF)：離散的なスケール変化

$$\sigma(u) = \bar{g}^2(2L) \qquad u = \bar{g}^2(L)$$

$\Sigma(u, a/L)$ 格子上のSSF



結合定数の非摂動的発展

Luescher et al., NPB359(1991)221

Step scaling function (SSF)：離散的なスケール変化

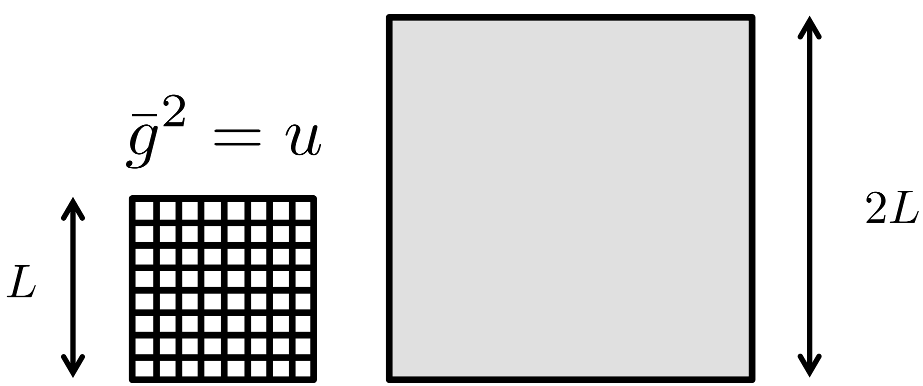
$$\sigma(u) = \bar{g}^2(2L) \qquad\qquad u = \bar{g}^2(L)$$

$\Sigma(u, a/L)$ 格子上のSSF

$$\sigma(u) = \lim_{a/L \longrightarrow \infty} \Sigma(u, a/L)$$

連続極限

$\sigma(u)$



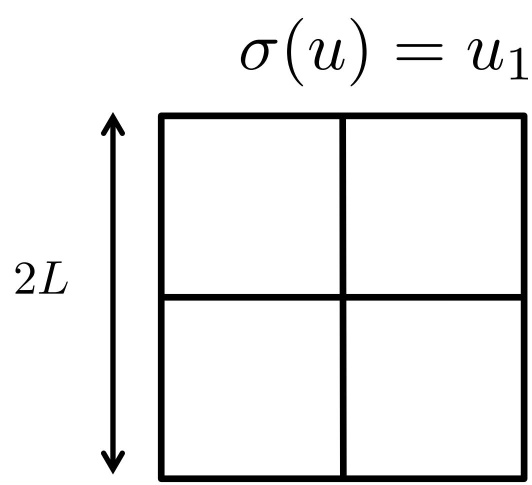
結合定数の非摂動的発展

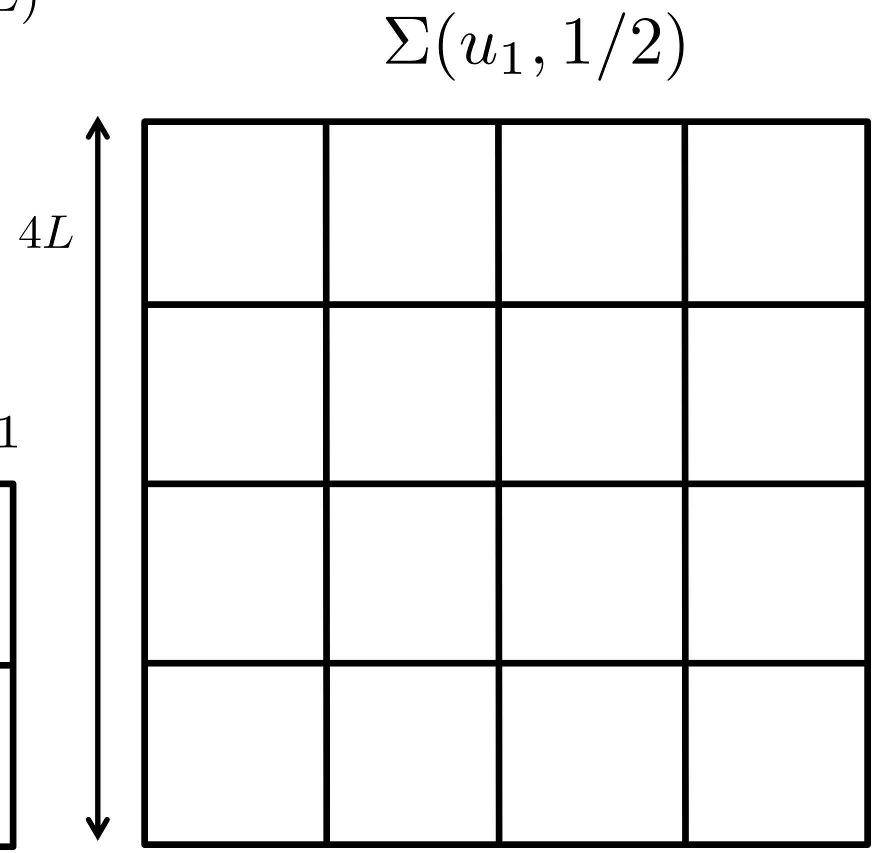
Luescher et al., NPB359(1991)221

Step scaling function (SSF)：離散的なスケール変化

$$\sigma(u) = \bar{g}^2(2L) \qquad u = \bar{g}^2(L)$$

$\Sigma(u, a/L)$ 格子上のSSF





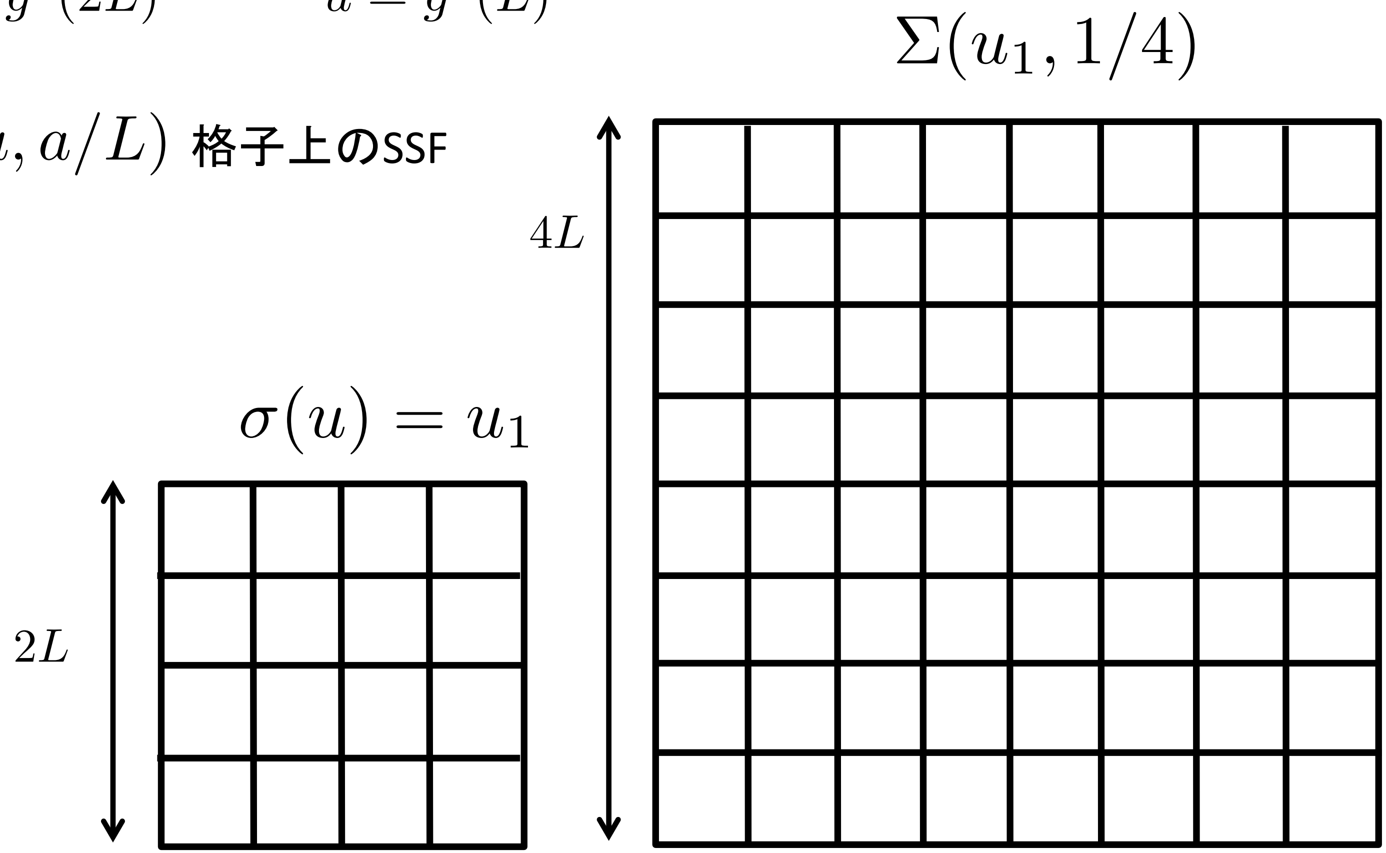
結合定数の非摂動的発展

Luescher et al., NPB359(1991)221

Step scaling function (SSF)：離散的なスケール変化

$$\sigma(u) = \bar{g}^2(2L) \qquad u = \bar{g}^2(L)$$

$\Sigma(u, a/L)$ 格子上のSSF



結合定数の非摂動的発展

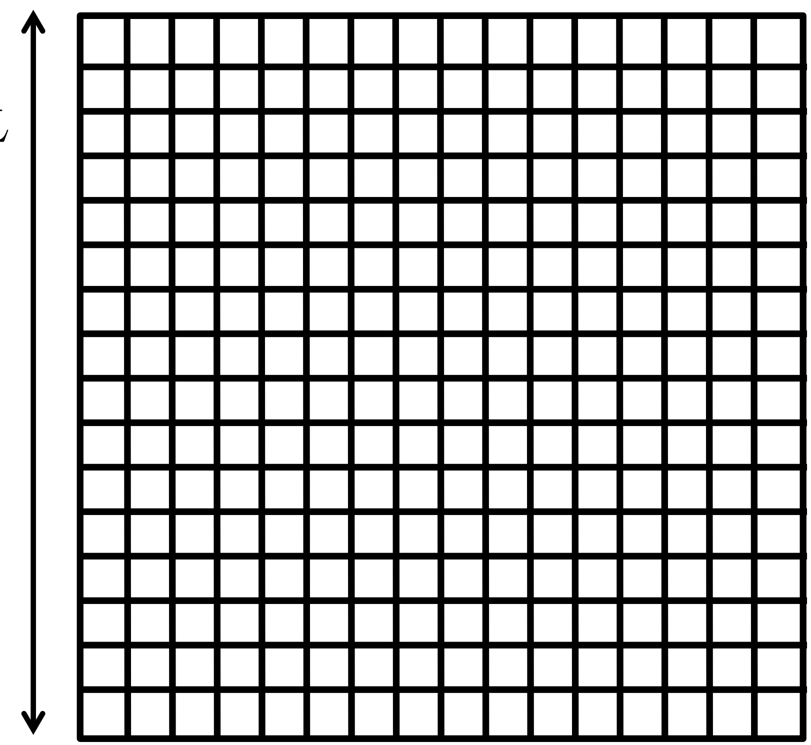
Luescher et al., NPB359(1991)221

Step scaling function (SSF)：離散的なスケール変化

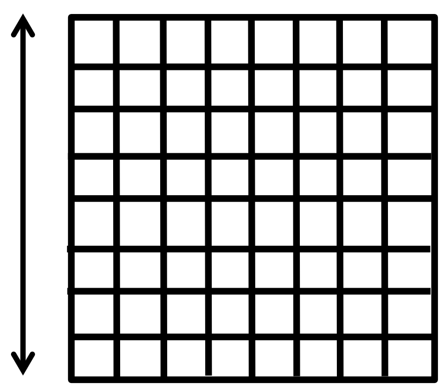
$$\sigma(u) = \bar{g}^2(2L) \qquad u = \bar{g}^2(L)$$

$\Sigma(u, a/L)$ 格子上のSSF

$$\Sigma(u_1, 1/8)$$



$$\sigma(u) = u_1$$



結合定数の非摂動的発展

Luescher et al., NPB359(1991)221

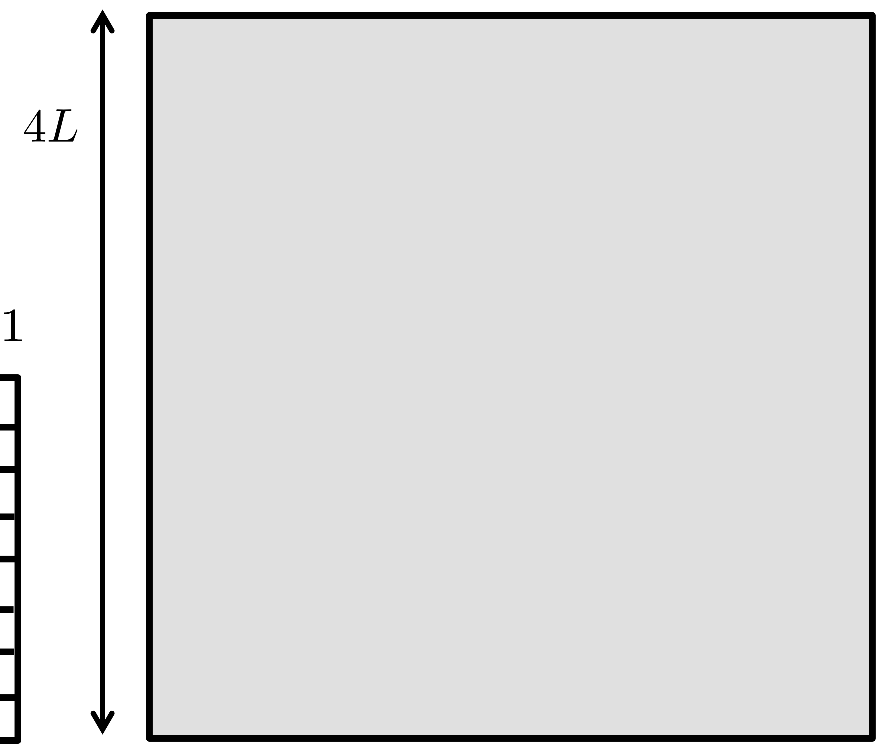
Step scaling function (SSF)：離散的なスケール変化

$$\sigma(u) = \bar{g}^2(2L) \qquad u = \bar{g}^2(L)$$

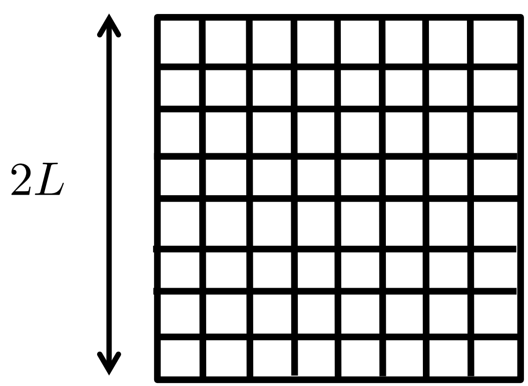
連続極限

$$\sigma(u_1)$$

$\Sigma(u, a/L)$ 格子上のSSF



$$\sigma(u) = u_1$$



結合定数の非摂動的発展

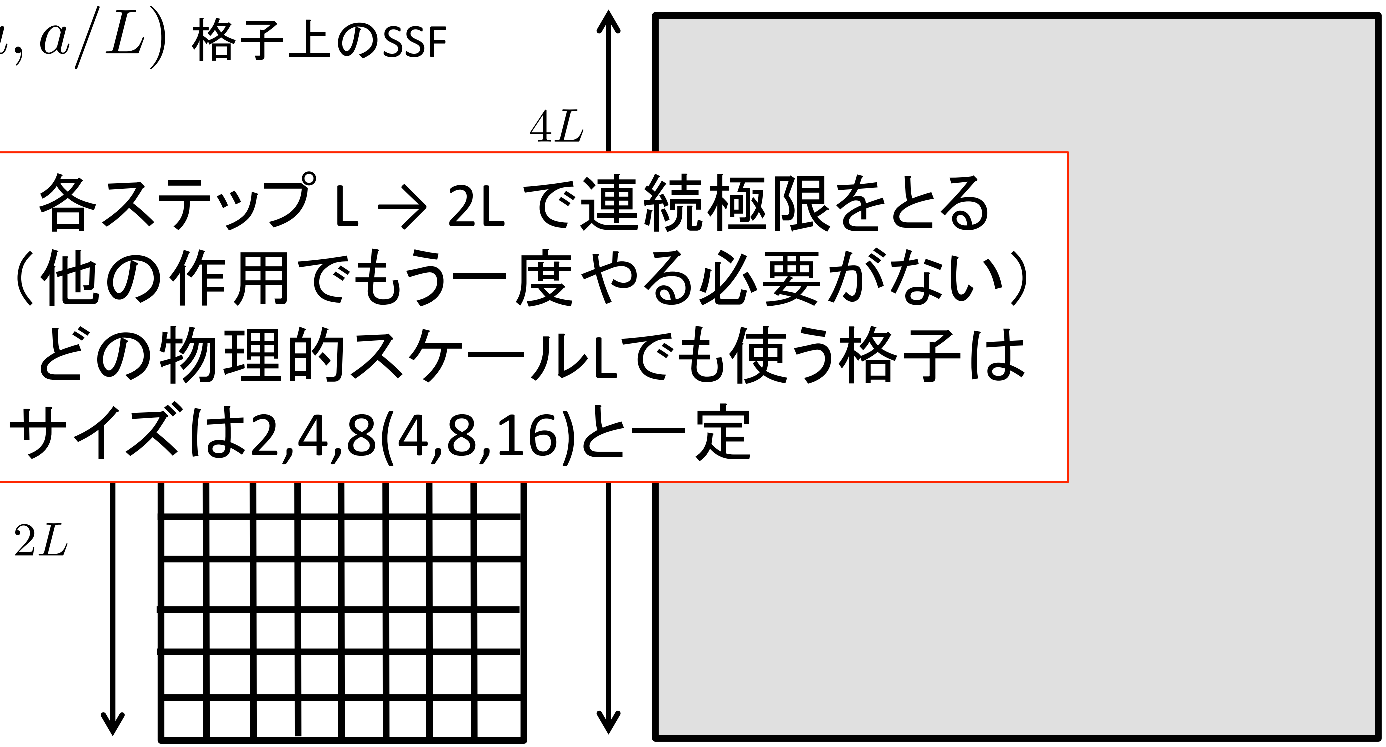
Luescher et al., NPB359(1991)221

Step scaling function (SSF)：離散的なスケール変化

$$\sigma(u)=\bar{g}^2(2L) \qquad u=\bar{g}^2(L)$$

$\sigma(u_1)$ 連続極限

$\Sigma(u,a/L)$ 格子上のSSF



- 各ステップ L → 2L で連続極限をとる（他の作用でもう一度やる必要がない）
- どの物理的スケールLでも使う格子はサイズは2,4,8(4,8,16)と一定

具体例 N_f=2 ALPHA, NPB713(2005)378

Step scaling functionの連続極限

$$u = \bar{g}^2(\mu)$$

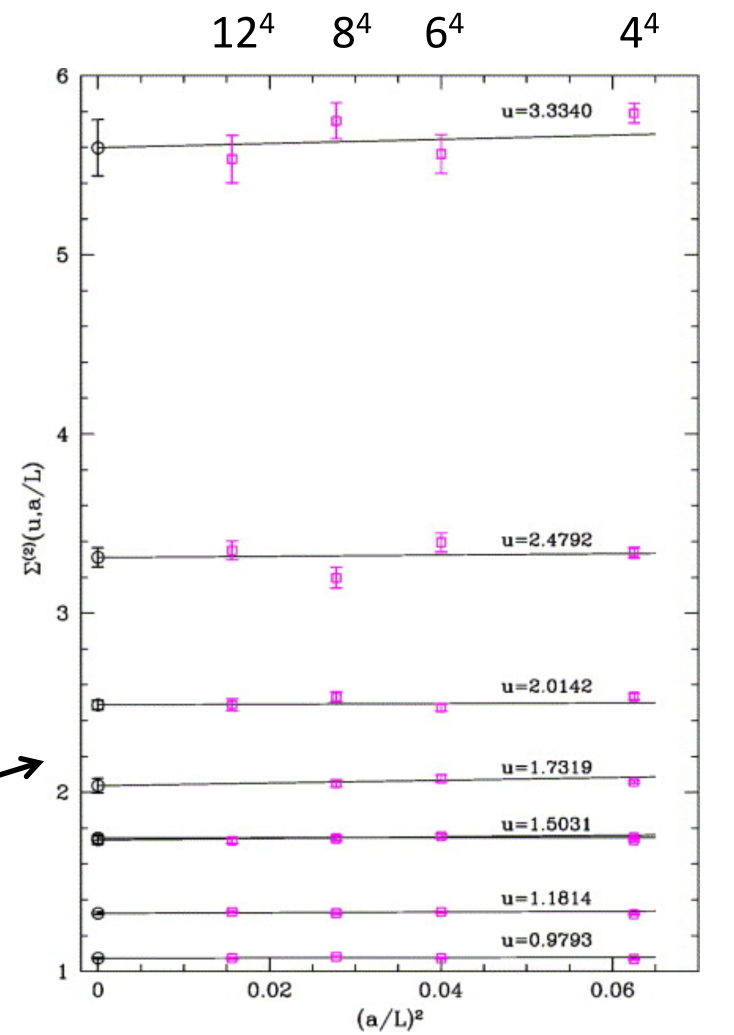
繰り込まれたcoupling uを固定してa/L→0

$$\sigma(u) = \lim_{a/L \longrightarrow \infty} \Sigma(u, a/L)$$

格子上で計算したSSF

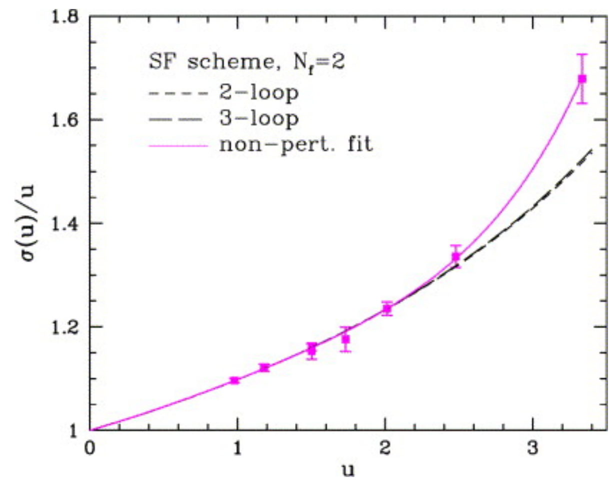
$$\Sigma(u, a/L) = \sigma(u) + C(a/L)^2$$

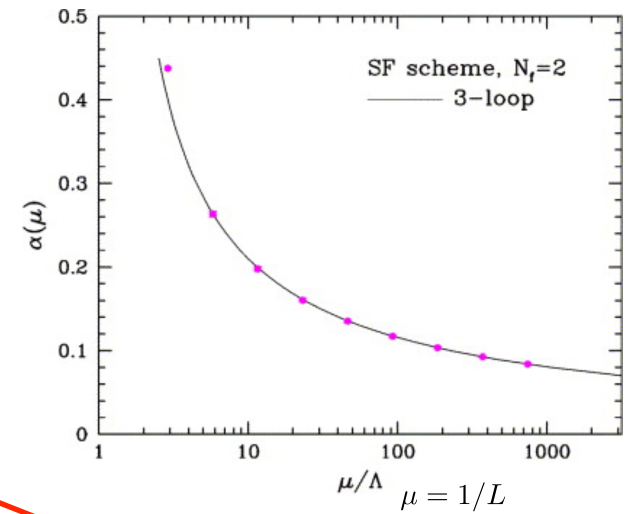
それほど大きくない格子
L/a=4～12(8～24)でも
lattice artifactが小さい。
あくまでSFスキームの場合



具体例 N_f=2

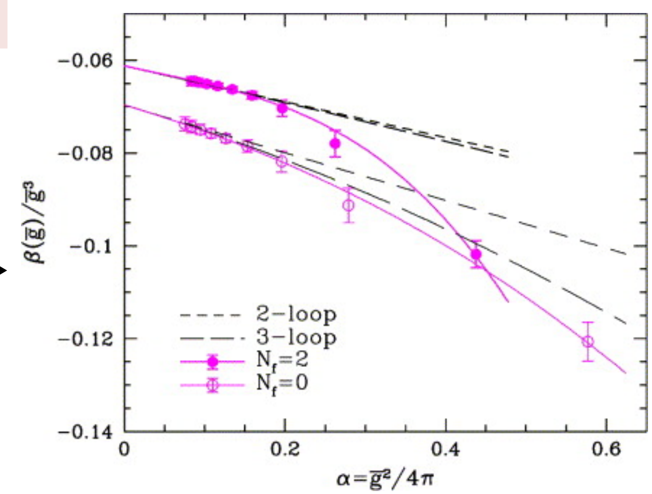
ALPHA, NPB713(2005)378





$$u_i = \bar{g}^2(2^i \mu_{\min})$$
$$i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$\beta(\sqrt{\sigma(u)}) = \beta(\sqrt{u})\sqrt{\frac{u}{\sigma(u)}}\sigma'(u)$$



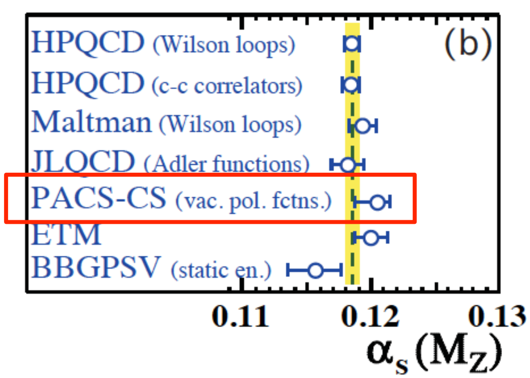
u<2では摂動論と合っている
u>2では非摂動効果がみえてる

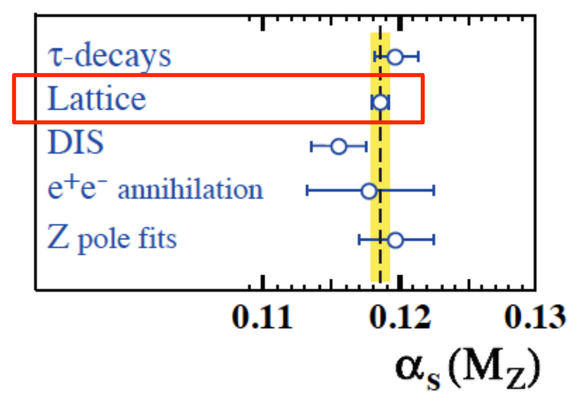
Status

Lambda parameter $\Lambda_{\overline{MS}}$ input: Sommer scale r_0=0.5fm [MeV]

ref.	N_f=0	N_f=2	N_f=4	N_f=5
ALPHA NPB413(1994)481	238(19)			
ALPHA NPB713(2005)378		245(16)(16)		
PACS-CS JHEP0910:053,2009				239(10)(-6)(-22)
PDG 2013			297(8)	214(7)

Strong coupling world average $\alpha_s(m_Z)$=0.1185(6) PDG 2013





クォーク質量の非摂動繰り込み

ALPHA, NPB544(1999)669

基本的には、couplingと同じ

$$M \quad = \quad \bar{m}(2b_0\bar{g}^2)^{-d_0/2b_0^2}\exp\left[-\int_0^{\bar{g}} dg\left(\frac{\tau(g)}{\beta(g)}-\frac{d_0}{b_0 g}\right)\right]$$

クォーク質量の非摂動繰り込み

ALPHA, NPB544(1999)669

基本的には、couplingと同じ

$$
\begin{aligned}
M &= \bar{m}\boxed{(2b_0\bar{g}^2)^{-d_0/2b_0^2}\exp\left[-\int_0^g dg\left(\frac{\tau(g)}{\beta(g)}-\frac{d_0}{b_0 g}\right)\right]} \\
&= \bar{m}(\mu)\boxed{F(\bar{g}(\mu))}
\end{aligned}
$$

クォーク質量の非摂動繰り込み

ALPHA, NPB544(1999)669

基本的には、couplingと同じ

$$
\begin{aligned}
M &= \bar{m}(2b_0\bar{g}^2)^{-d_0/2b_0^2}\exp\left[-\int_0^{\bar{g}} dg\left(\frac{\tau(g)}{\beta(g)} - \frac{d_0}{b_0 g}\right)\right] \\
&= \bar{m}(\mu)F(\bar{g}(\mu)) \\
&= \bar{m}(\mu_{\rm high})F(\bar{g}(\mu_{\rm high}))
\end{aligned}
$$

ここの摂動展開をよくするため

クォーク質量の非摂動繰り込み

ALPHA, NPB544(1999)669

基本的には、couplingと同じ

$$\begin{aligned} M &= \bar{m}(2b_0\bar{g}^2)^{-d_0/2b_0^2}\exp\left[-\int_0^{\bar{g}} dg\left(\frac{\tau(g)}{\beta(g)}-\frac{d_0}{b_0 g}\right)\right] \\ &= \bar{m}(\mu)F(\bar{g}(\mu)) \\ &= \bar{m}(\mu_{\rm high})F(\bar{g}(\mu_{\rm high})) \end{aligned}$$

繰り込まれた質量の連続極限　　$u=\bar{g}^2(\mu)$:固定

$$\bar{m}(\mu)=\lim_{a\to 0} Z_m(g_0,a\mu)m_{\rm bare}(g_0)\Big|_{u=\bar{g}^2(\mu)}$$

$a\mu \ll 1$ ➡ 繰り込みスケールμは低エネルギーがよい

クォーク質量の非摂動繰り込み

ALPHA, NPB544(1999)669

基本的には、couplingと同じ

$$
\begin{aligned}
M &= \bar{m}(2b_0\bar{g}^2)^{-d_0/2b_0^2}\exp\left[-\int_0^{\bar{g}} dg\left(\frac{\tau(g)}{\beta(g)}-\frac{d_0}{b_0 g}\right)\right] \\
&= \bar{m}(\mu)F(\bar{g}(\mu)) \\
&= \bar{m}(\mu_{\mathrm{high}})F(\bar{g}(\mu_{\mathrm{high}})) \\
&= \bar{m}(\mu_{\mathrm{low}})\frac{\bar{m}(\mu_{\mathrm{high}})}{\bar{m}(\mu_{\mathrm{low}})}F(\bar{g}(\mu_{\mathrm{high}}))
\end{aligned}
$$

クォーク質量の非摂動繰り込み

ALPHA, NPB544(1999)669

基本的には、couplingと同じ

$$
\begin{aligned}
M &= \bar{m}(2b_0\bar{g}^2)^{-d_0/2b_0^2}\exp\left[-\int_0^{\bar{g}} dg\left(\frac{\tau(g)}{\beta(g)}-\frac{d_0}{b_0 g}\right)\right] \\
&= \bar{m}(\mu)F(\bar{g}(\mu)) \\
&= \bar{m}(\mu_{\rm high})F(\bar{g}(\mu_{\rm high})) \\
&= \bar{m}(\mu_{\rm low})\boxed{\frac{\bar{m}(\mu_{\rm high})}{\bar{m}(\mu_{\rm low})}}F(\bar{g}(\mu_{\rm high}))
\end{aligned}
$$

摂動計算

ハドロンスペクトル

Step scaling的な広範囲の非摂動的発展

$$
\frac{\bar{m}(\mu_{\rm high})}{\bar{m}(\mu_{\rm low})} = \frac{\bar{m}(2\mu_{\rm low})}{\bar{m}(\mu_{\rm low})}\frac{\bar{m}(4\mu_{\rm low})}{\bar{m}(2\mu_{\rm low})}\cdots\frac{\bar{m}(\mu_{\rm high})}{\ldots}
$$

クォーク質量の非摂動繰り込み

ALPHA, NPB544(1999)669

基本的には、couplingと同じ

$$
\begin{aligned}
M &= \bar{m}(2b_0\bar{g}^2)^{-d_0/2b_0^2}\exp\left[-\int_0^{\bar{g}} dg\left(\frac{\tau(g)}{\beta(g)}-\frac{d_0}{b_0 g}\right)\right] \\
&= \bar{m}(\mu)F(\bar{g}(\mu)) \\
&= \bar{m}(\mu_{\mathrm{high}})F(\bar{g}(\mu_{\mathrm{high}})) \\
&= \bar{m}(\mu_{\mathrm{low}})\boxed{\frac{\bar{m}(\mu_{\mathrm{high}})}{\bar{m}(\mu_{\mathrm{low}})}}F(\bar{g}(\mu_{\mathrm{high}}))
\end{aligned}
$$

Step scaling的な広範囲の非摂動的発展

$$
\frac{\bar{m}(\mu_{\mathrm{high}})}{\bar{m}(\mu_{\mathrm{low}})} = \boxed{\frac{\bar{m}(2\mu_{\mathrm{low}})}{\bar{m}(\mu_{\mathrm{low}})}}\frac{\bar{m}(4\mu_{\mathrm{low}})}{\bar{m}(2\mu_{\mathrm{low}})}\cdots\frac{\bar{m}(\mu_{\mathrm{high}})}{\cdots}
$$

クォーク質量のStep scaling function

クォーク質量の非摂動繰り込み

ALPHA, NPB544(1999)669

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\mathrm{P}}(u) &= \frac{\bar{m}(\mu)}{\bar{m}(\mu/2)} \\
&= \lim_{a\to 0} \left.\frac{Z_m(g_0, a\mu)}{Z_m(g_0, a\mu/2)}\right|_{u=\bar{g}^2(\mu)} \\
&= \lim_{a\to 0} \left.\frac{Z_{\mathrm{P}}(g_0, a\mu/2)}{Z_{\mathrm{P}}(g_0, a\mu)}\right|_{u=\bar{g}^2(\mu)}
\end{aligned}
$$

$$Z_m(g_0, a\mu) = \frac{Z_{\mathrm{A}}(g_0)}{Z_{\mathrm{P}}(g_0, a\mu)}$$

$$
\begin{aligned}
A_{\mathrm{R},\mu} &= Z_{\mathrm{A}} A_\mu \\
P_{\mathrm{R}} &= Z_{\mathrm{P}} P
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_\mu &= Z_{\mathrm{A}} \bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi \\
P &= Z_{\mathrm{P}} \bar{\psi}\gamma_5\psi
\end{aligned}
$$

Z_Pの計算に帰着

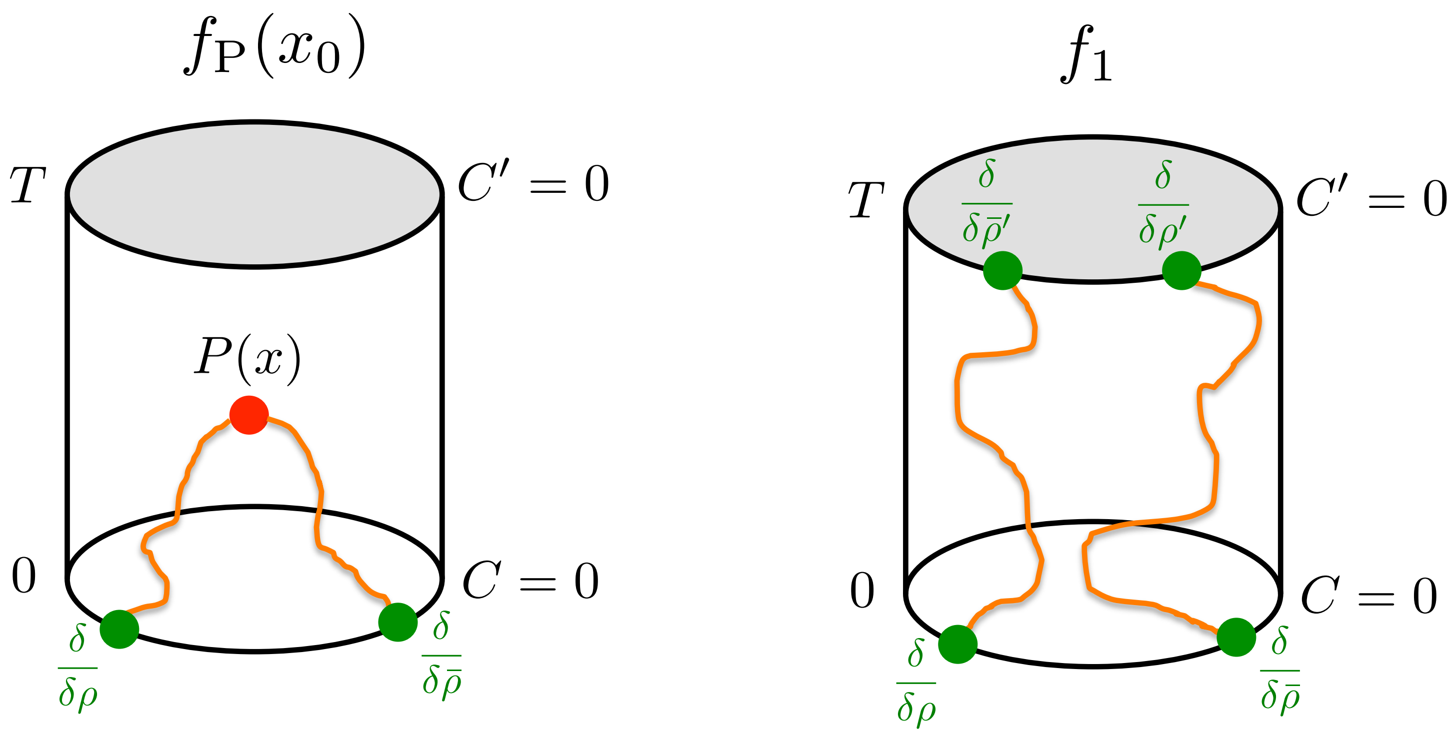
クォーク質量の非摂動繰り込み

ALPHA, NPB544(1999)669

$Z_{\rm P}(g_0, a\mu)$ の定義

$$\frac{Z_{\rm P} f_{\rm P}(x_0 = T/2)}{\sqrt{f_1}} = \frac{f_{\rm P}(x_0 = T/2)}{\sqrt{f_1}}\bigg|_{\rm tree\ level}$$

at massless



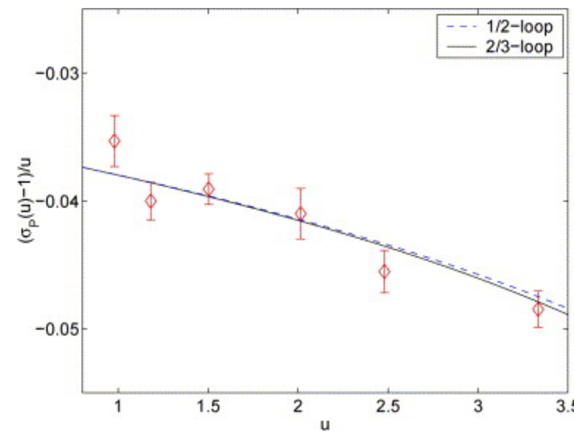
クォーク質量の非摂動繰り込み

ALPHA, NPB729(2005)117　$N_f=2$

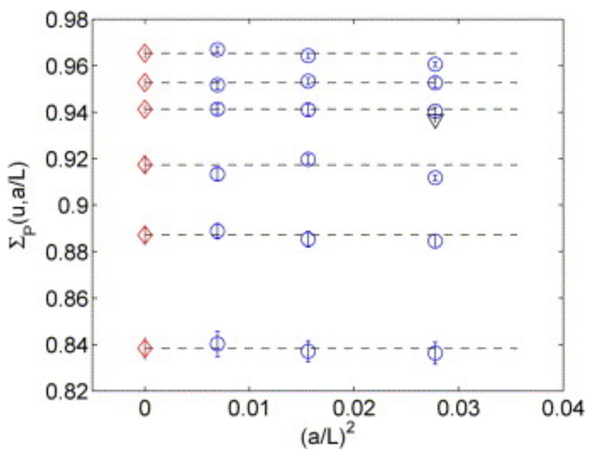
$$\Sigma_{\rm P}(u,a/L) = \left.\frac{Z_{\rm P}(g_0,a/2L)}{Z_{\rm P}(g_0,a/L)}\right|_{u=\bar{g}^2(1/L)}$$

$$\mu = 1/L$$

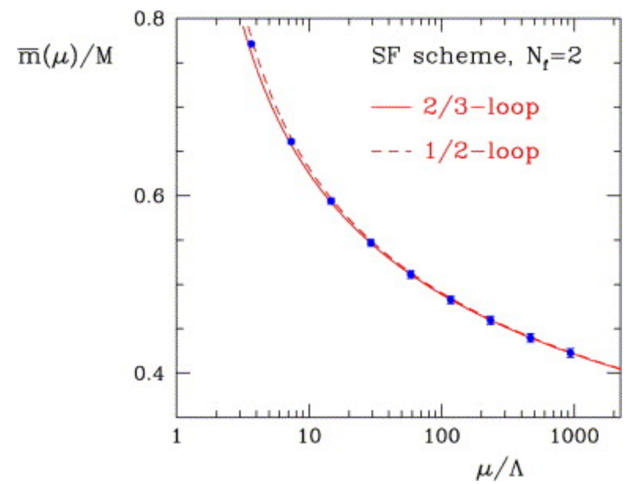
$$\sigma_{\rm P}(u) = \lim_{a\to 0}\Sigma_{\rm P}(u,a/L) = \frac{\bar{m}(\mu)}{\bar{m}(\mu/2)}$$



12^4　8^4　6^4



u:強結合



Status of RGI mass

Sommer, arXiv:hep-lat/0611020

ref.	flavor	N_f	input	RGI mass[GeV]
ALPHA NPB571(2000)237	strange	0	m_K, r_0	0.137(05)
ALPHA NPB729(2005)117	strange	2	m_K, r_0	0.137(27)
ALPHA JHEP12(2002)007	charm	0	m_D, r_0	1.654(45)
Della Morte PoS lat05,224	bottom	0	m_{Bs}, m_{Bs*}, r_0	6.771(99)

HQET

SFによるその他の演算子の繰り込み

- 4-quark operator, 摂動計算 Palombi et al, JHEP03(2006)089
- 4-quark operator, N_f=0 非摂動計算 ALPHA, JHEP03(2006)088
- 4-quark operator, N_f=2 非摂動計算 ALPHA, hep-lat/061077
- HQET, heavy-light current, 摂動計算 NPB597(2001)488
- HQET, heavy-light current, N_f=0 非摂動計算 NPB669(2003)173
- HQET, heavy-light 4-quark, 定式化・摂動計算 JHEP08(2006)017

非摂動繰り込みの活用と今後

- IR fixed point searchのためにSF couplingを使っている例もたくさんある Appelquist, PRL100(2008)171607 .....
- ラムダパラメータのさらなる精密決定のため、現在ALPHAは新しい戦略を打ち出した。SF coupling（高エネルギーで有利）とGradient flow coupling（低エネルギーで有利）を中間の繰り込みスケールで非摂動マッチングする

Fritzsch, arXiv:1411.7648
Sint, Lattice 2015

Symanzik流の改良

ベキ発散がない場合の格子上で計算されたbareな量
例 : SF coupling

$$P_{\text{lat}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{l} P_{lmn} g_0^{2l} a^m (\ln a)^n$$

loopの次数
cutoff effect
log発散の次数

- 繰り込み群的改良(例:Iwasaki作用)もあるが、それとは思想が違う
- 連続極限の加速　支配的なものから系統的に除去 $a \to a^2$
- 古典的には、微分の改良と同じような思想(高次のルンゲ･クッタ法)
- 量子論的には、加えたcounter termの係数が結合定数の関数となる
⇒非摂動的改良　a×c[係数]×[体積]×[演算子]
- くりこみと同様、対称性と次元勘定が重要な指針となる
- 改良とは「くりこみの延長で、cut offの逆数(発散ではない)のirrelevant operatorによるくりこみ」とも言える
- これまで、lattice計算では改良の手法が発展

「くりこみ」と「改良」の対応関係

- 発散の除去 ln(a),1/a,1/a^2,…
- counter term: relevant/marginal
- 繰り込み因子
- 繰り込み条件

- 離散化誤差の除去a,a^2,….
- counter term: irrelevant
- 改良係数 c_{sw}, c_A, …
- 改良条件：格子上で破れている対称性（回転対称性・カイラル対称性(Wilson Fermionの場合））を回復するように要請する

O(a)改良係数を非摂動的に決める際 massless を実現するが重要
⬇
SFが重要な役割を果たす

O(aΛ_{QCD})とO(am)を区別するため

第3部：カイラルフェルミオンとSF

なぜ、SFでカイラルフェルミオン？

- 4-fermion operatorの非摂動繰り込み
- カイラル対称性が重要
- BNL/RBC(Domain wall fermion)とJLQCD (overlap)が精力的にB_Kを計算している
- RI/MOMスキーム(Large scale problemを抱えている)
- 今後、非摂動繰り込みが系統誤差の中で支配的になると予想される
- SFスキームによる非摂動繰り込みが必要
- カイラルフェルミオンをSFで定式化する必要あり

カイラルフェルミオン（普通の格子上）

massless

Ginsparg-Wilson 関係式 Ginsparg & Wilson, PRD25(1982)2649

$$\gamma_5 D + D\gamma_5 = aD\gamma_5 D$$ 格子上のカイラル対称性

Overlap operator GW 関係式の解 Neuberger, PLB417(1998)141

$$D_{\rm ov} = \frac{1+s}{a}\left\{1 - A(A^\dagger A)^{-1/2}\right\}$$

$$A = 1 + s - aD_{\rm w} \qquad |s| < 1$$

$D_{\rm w}$: massless Wilson-Dirac op.

Domain wall operator Overlap operatorの5次元表現 Kaplan, PLB288(1992)342
Shamir, NPB406(1993)90

$$D_{\rm DWF} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{\rm w} & -P_L & 0 & 0 \\ -P_R & \tilde{D}_{\rm w} & -P_L & 0 \\ 0 & -P_R & \tilde{D}_{\rm w} & -P_L \\ 0 & 0 & -P_R & \tilde{D}_{\rm w} \end{bmatrix}$$

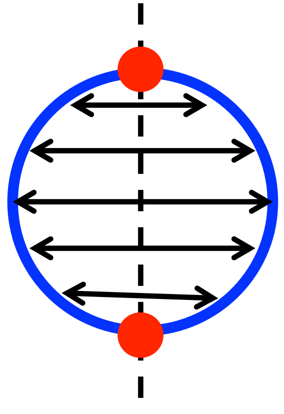
$$P_{R/L} = (1 \pm \gamma_5)/2$$

$$a\tilde{D}_{\rm w} = aD_{\rm w} - m_5 + 1$$

$$0 < m_5 < 2$$

SFでのカイラルフェルミオン

	Orbifolding	**Universality argument**
Overlap	Taniguchi, JHEP12(2005)037 Sint, NPB847(2011)491	Luescher, JHEP05(2006)042 ST, NPB796(2008)402
DWF	Taniguchi, JHEP10(2006)027	ST, PRD87(2013)114506 Murakami et al., arXiv:1410.8335



Orbifoldingでは、フレーバー数は偶数でないとダメ

Universality argumentはフレーバー数に制限なし

境界条件とカイラル対称性

連続理論

SF境界条件があっても　$\gamma_5 D + D\gamma_5 = 0$

$$D = (\partial_\mu + A_\mu)\gamma_\mu$$

矛盾？

しかし、SF境界条件はカイラル対称性を破る

$$P_+\psi(x)|_{x_0=0} = 0 \qquad P_-\psi(x)|_{x_0=T} = 0$$

$$\delta_A^a \psi(x) = \frac{1}{2}\tau^a\gamma_5\psi(x)$$

$\rho = 0$　　　$P_\pm = (1 \pm \gamma_0)/2$

（微分）演算子は境界条件のことは知らない　∵局所的なものだから当然。

ヒルベルト空間上の場が境界条件を知っている（満たしている）。

プロパゲーターを見てみよう　$\langle\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle_{\mathrm{F}} = S(x,y)$

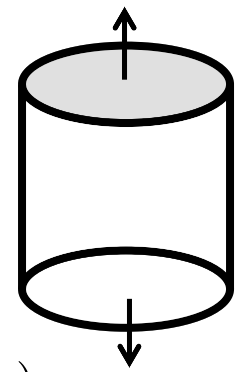
PropagatorでみたカイラルMARKER対称性

inhomogeneous eq.

$$D\psi(x) = \nu(x)$$

Def. of propagator

$$DS(x,y) = \delta(x-y)$$



inhomogeneous eq. を形式的に解いて

$$\psi(x) = \int_V d^4y\,\delta(x-y)\psi(y)$$

部分積分 $\downarrow$　　表面積分

$$= \int_V d^4y\,S(x,y)D\psi(y) - \int_{\partial V} d^3\mathbf{y}\,S(x,y)(\pm\gamma_0)\psi(y)$$

$$\psi(x) \to \gamma_5 S(x,y) \qquad \nu(x) \to -\gamma_5\delta(x-y)$$ とすると

$$\boxed{\{\gamma_5, S(x,y)\} = \int_{z_0=0,T} d^3\mathbf{z}\,S(x,z)\gamma_5 S(z,y) \neq 0}$$

境界があるために右辺(境界面上の積分)がゼロではない

要請　格子上のSFで仮にoverlap演算子を作っても、連続極限でこれを再現しないといけない。つまり、ナイーブなやつはダメ $\cancel{1 - A_{\mathrm{SF,w}}(A^\dagger_{\mathrm{SF,w}}A_{\mathrm{SF,w}})^{-1/2}}$

格子上のSFでoverlapを作る際の指針

無限体積でのoverlap演算子に境界近傍にのみ少し変更を
加えて修正GW関係式を満たすように（GWを破る）しておけば

bulkのカイラルは保つ

境界近傍に非ゼロ
の値を持つ行列

$$\{\gamma_5, D_{\mathrm{SF,ov}}\} = aD_{\mathrm{SF,ov}}\gamma_5 D_{\mathrm{SF,ov}} + \Delta$$

$$\Delta \xrightarrow{a \longrightarrow 0} 0$$

$$\{\gamma_5, D\} = 0$$

両側からプロパゲーターをかけて

$$\{\gamma_5, D^{-1}_{\mathrm{SF,ov}}\} = a\gamma_5 + D^{-1}_{\mathrm{SF,ov}}\Delta D^{-1}_{\mathrm{SF,ov}}$$

$$\Big\downarrow \; a \longrightarrow 0$$

$$\int_{z_0=0,T} d^3\mathbf{z} S(x,z)\gamma_5 S(z,y)$$

連続極限でプロパゲーターが関係式を再現する（かもしれない）

わかったこと

少なくともGW関係式
は境界付近で破らな
いといけない

連続極限を取った時に境界条件がどうやって出てくるのだろうか？
SF境界条件とGW関係式を破る事はどう関係しているのか？

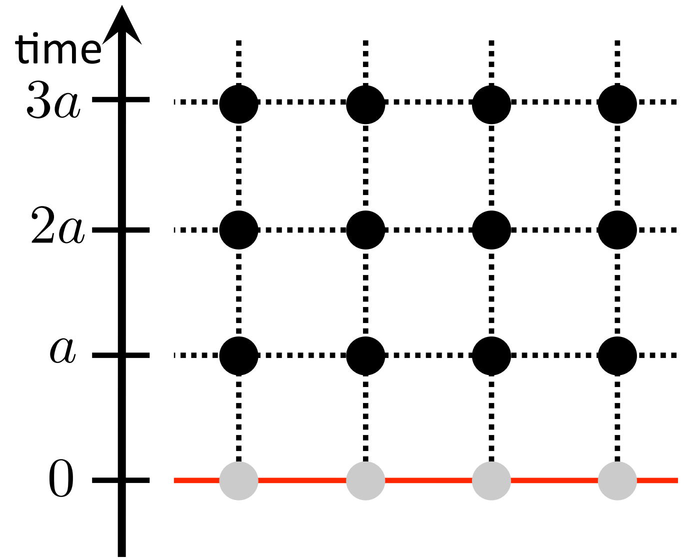
Universality argument

Luescher, JHEP05(2006)042 ST, PRD87(2013)114506

Wilson fermionでは、transfer matrixがあったので、SF境界条件は自然に出たが
この境界条件の導出を別の視点から見てみる

$$S_{\rm w} = a^4 \sum_x \bar{\psi}(x) D_{\rm w} \psi(x)$$

$$D_{\rm w} = \frac{1}{2}\left[\sum_\mu (\nabla_\mu + \nabla_\mu^*)\gamma_\mu - a\sum_\mu \nabla_\mu^* \nabla_\mu\right] + m$$



プロパゲーターの定義

$$\langle \eta(x)\bar{\psi}(y)\rangle = a^{-4}\delta_{x,y} \qquad \eta(x) = \frac{\delta S_{\rm w}}{\delta\bar{\psi}(x)}$$

$2a \leqq x_0 \leqq T-2a$では

$$\eta(x) = D_{\rm w}\psi(x)$$

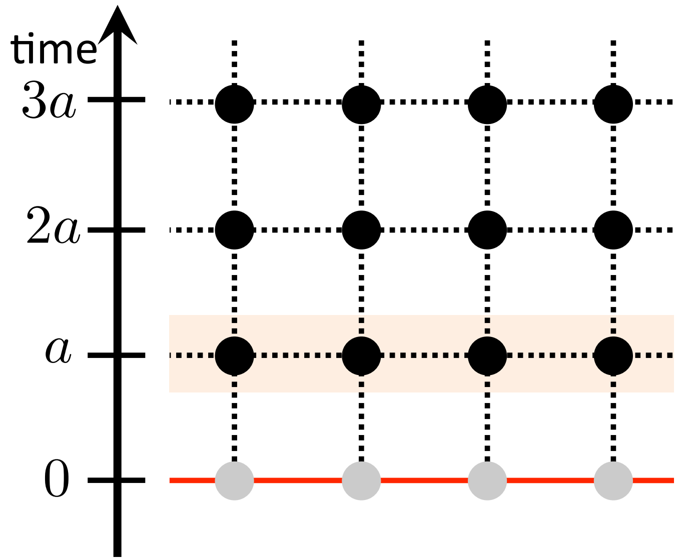
Universality argument

Luescher, JHEP05(2006)042 ST, PRD87(2013)114506

Wilson fermionでは、transfer matrixがあったので、SF境界条件は自然に出たが
この境界条件の導出を別の視点から見てみる

$$S_{\mathrm{w}} = a^4 \sum_x \bar{\psi}(x) D_{\mathrm{w}} \psi(x)$$

$$D_{\mathrm{w}} = \frac{1}{2}\left[\sum_\mu (\nabla_\mu + \nabla_\mu^*)\gamma_\mu - a\sum_\mu \nabla_\mu^* \nabla_\mu\right] + m$$



プロパゲーターの定義

$$\langle \eta(x)\bar{\psi}(y)\rangle = a^{-4}\delta_{x,y} \qquad \eta(x) = \frac{\delta S_{\mathrm{w}}}{\delta\bar{\psi}(x)}$$

x_0＝aでは

$$\eta(x) = \frac{1}{a}P_+\psi(x) - \nabla_0 P_-\psi(x) + \frac{1}{2}\left[\sum_k (\nabla_k + \nabla_k^*)\gamma_k - a\sum_k \nabla_k^*\nabla_k\right] + m\psi(x)$$

Universality argument

Luescher, JHEP05(2006)042 ST, PRD87(2013)114506

$$\langle \eta(x)\bar{\psi}(y)\rangle|_{x_0=a} = \frac{1}{a}P_+\langle\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle_{x_0=a} - \nabla_0 P_-\langle\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle_{x_0=a} + \dots$$

$$\Big\downarrow \; a \longrightarrow 0 \qquad x \neq y$$

$$\frac{1}{a}P_+\langle\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle_{x_0=0} = 0$$ つまり、 $$P_+\psi(x)|_{x_0=0} = 0$$

SF境界条件（ディリクレ型）は、ノイマン型よりも安定（次元勘定より）

境界近傍におまけの項を作用に入れ、係数を調整すればノイマン型
（あるいはmixedも）を出すことも可能

$$S_{\mathrm{w}} \longrightarrow S_{\mathrm{w}} + ca^3\sum_{\mathbf{x}}\bar{\psi}(x)P_+\psi(x)|_{x_0=a}$$

Universality argument

Luescher, JHEP05(2006)042 ST, PRD87(2013)114506

Universality argumentのまとめ

- 通常の格子上のカイラルフェルミオンを用意する
- 境界近傍におまけの項を入れ、GW関係式を破る
- SF境界条件（ディリクレ型）は連続極限を取った時に自動的に現れる

注意点

- 境界条件も、対称性と次元勘定から決まる Symanzik, NPB190(1981)1
- カイラル対称性(GW関係式)の破れは境界近傍だけで、バルクでは保たれている
- 他の対称性（ゲージ・空間・フレーバー）を保つ限り、おまけの項の作り方には自由度がある

Overlap

Luescher, JHEP05(2006)042

$$D_{\mathrm{ov}} = \frac{1+s}{a}\left\{1 - A(A^{\dagger}A)^{-1/2}\right\}$$

SF化

$$D_{\mathrm{SF,ov}} = \frac{1+s}{a}\left\{1 - \frac{1}{2}(U+\tilde{U})\right\}$$

境界から発生するO(a)を
取り除くために使われる

$c = 1+s$

$$U = A(A^{\dagger}A + caP)^{-1/2} \qquad |s| < 1$$

$$\tilde{U} = \gamma_5 U^{\dagger}\gamma_5 \qquad A = 1 + s - aD_{\mathrm{w}}$$

SFでのWilson-Dirac op.

$$aP(x,y) = \delta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}\delta_{x_0,y_0}(\delta_{x_0,a}P_- + \delta_{x_0,T-a}P_+)$$

GW関係式を破る
$A^{\dagger}A$のゼロモードを除去
境界O(a)改良のcounter term

- γ_5エルミート
- det $D_{\mathrm{SF,ov}}$(m)>0 if m>0
- 固有値分布 : 円(無限格子)→円盤(SF)へ
- Locality : 指数関数的にOK
- Chiral symmetry (修正GW関係式)

境界近傍で指数関数的に局在

$$\{\gamma_5, D_{\mathrm{SF,ov}}\} = aD_{\mathrm{SF,ov}}\gamma_5 D_{\mathrm{SF,ov}} + \Delta_{\mathrm{B}}$$

数値的側面

ST, NPB796(2008)402

$$X = A^\dagger A + caP$$

Freeの場合でも、時間方向がフーリエ変換できない（時間-運動量表示）

摂動計算でさえも、プロパゲーターを数値的に計算する必要がある

$\boxed{X^{-1/2}\text{の近似法}}$ minimax近似

Clenshaw sum scheme

チェビシェフ多項式

$$X^{-1/2} \approx \sum_{k=0}^{N} c_k T_k(Y)$$

$$Y = [2X - (v+u)]/(v-u)$$
$$u \le \mathrm{spec}(X) \le v$$

Giusti et al., Com.phys.com.153(2003)31

Minimax多項式を得るためにRemezアルゴリズムを用いた

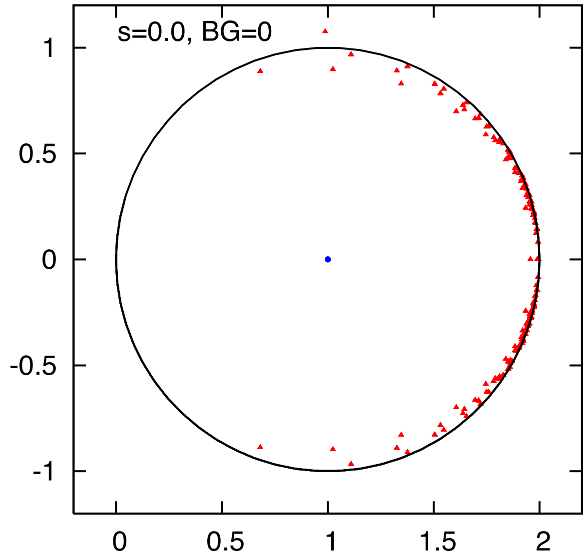
$D_{SF,ov}$の固有値

ST, NPB796(2008)402

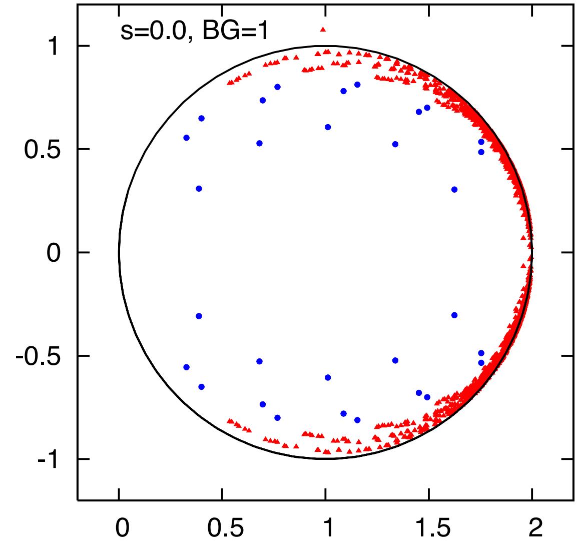
$$||\bar{a}D_{\mathrm{SF,ov}} - 1|| \leq 1$$

Massless & Free 演算子
$T/a = L/a = 6$

C=C'=0



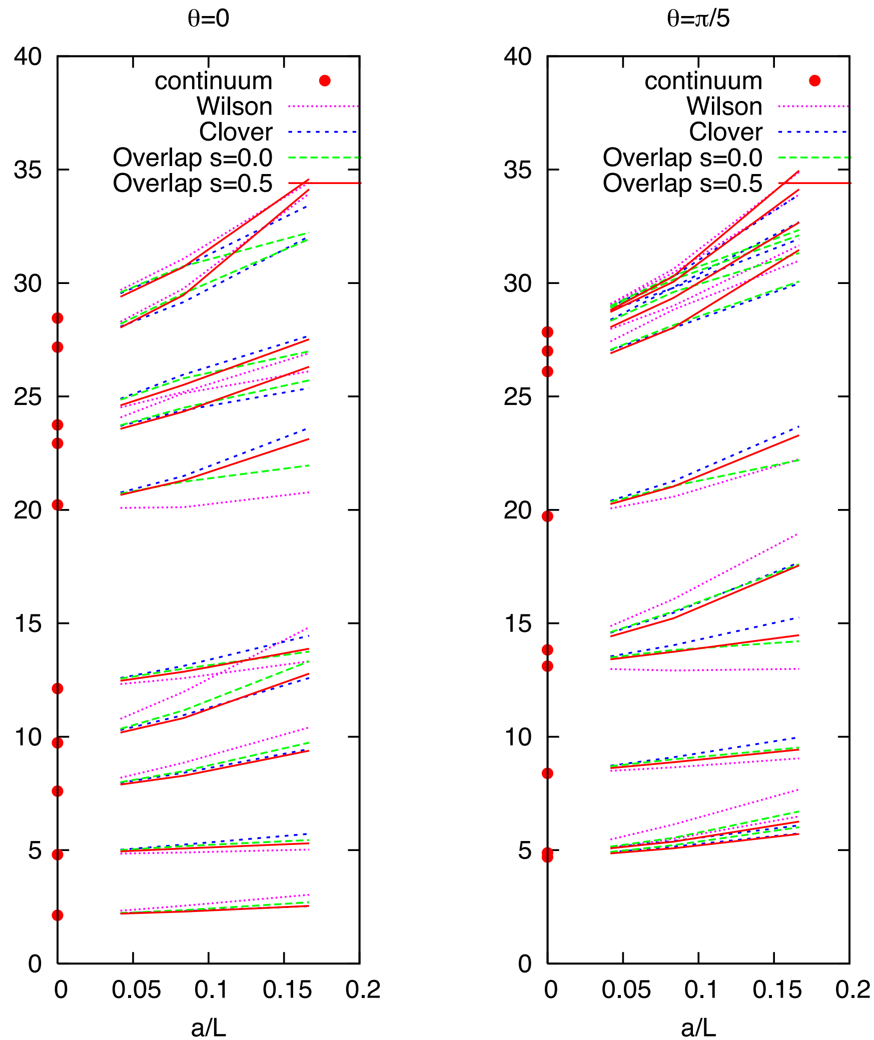
C,C'≠0



青点：ゼロ運動量 $\mathbf{p} = (0, 0, 0)$
赤点：その他の運動量

(T/a-1)×4[spin]×3[color]次の行列
ただし、colorは対角的

$L^2\ D_{SF,ov}{}^{\dagger} D_{SF,ov}$の固有値



ST, NPB796(2008)402

Massless & Free 演算子

Tree levelでのuniversality check

連続値+Wilson+Clover :
Sint & Sommer, NPB465(1996)71

Domain wall fermions

無限格子上のDWF

ST, PRD87(2013)114506

$L_s = 6$ massless

$P_{R/L} = (1 \pm \gamma_5)/2$

$\tilde{D}_{\mathrm{w}} = D_{\mathrm{w}} - m_5 + 1$ $0 < m_5 < 2$

$$D_{\mathrm{DW}} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{\mathrm{w}} & -P_L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -P_R & \tilde{D}_{\mathrm{w}} & -P_L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P_R & \tilde{D}_{\mathrm{w}} & -P_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P_R & \tilde{D}_{\mathrm{w}} & -P_L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P_R & \tilde{D}_{\mathrm{w}} & -P_L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -P_R & \tilde{D}_{\mathrm{w}} \end{bmatrix}$$

Domain wall fermions

無限格子上のDWF

ST, PRD87(2013)114506

$L_s = 6$ massive

$$P_{R/L} = (1 \pm \gamma_5)/2$$

$$\tilde{D}_{\mathrm{w}} = D_{\mathrm{w}} - m_5 + 1$$

$$0 < m_5 < 2$$

$$D_{\mathrm{DW}} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{\mathrm{w}} & -P_L & 0 & 0 & 0 & mP_R \\ -P_R & \tilde{D}_{\mathrm{w}} & -P_L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P_R & \tilde{D}_{\mathrm{w}} & -P_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P_R & \tilde{D}_{\mathrm{w}} & -P_L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P_R & \tilde{D}_{\mathrm{w}} & -P_L \\ mP_L & 0 & 0 & 0 & -P_R & \tilde{D}_{\mathrm{w}} \end{bmatrix}$$

Domain wall fermions

SF上のDWF

ST, PRD87(2013)114506

$$P_{R/L} = (1 \pm \gamma_5)/2$$

$$L_s = 6 \qquad \tilde{D}_{\mathrm{w}} = D_{\mathrm{w}} - m_5 + 1 \qquad 0 < m_5 < 2$$

$$D_{\mathrm{SF,DW}} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{\mathrm{w}} & -P_L & 0 & 0 & 0 & cB_+ \\ -P_R & \tilde{D}_{\mathrm{w}} & -P_L & 0 & cB_+ & 0 \\ 0 & -P_R & \tilde{D}_{\mathrm{w}} & -P_L + cB_+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P_R + cB_- & \tilde{D}_{\mathrm{w}} & -P_L & 0 \\ 0 & cB_- & 0 & -P_R & \tilde{D}_{\mathrm{w}} & -P_L \\ cB_- & 0 & 0 & 0 & -P_R & \tilde{D}_{\mathrm{w}} \end{bmatrix}$$

$$B_\pm(x,y) = \pm\delta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}\delta_{x_0,y_0}\gamma_5(\delta_{x_0,a}P_- + \delta_{x_0,T-a}P_+) \qquad P_\pm = (1 \pm \gamma_0)/2$$

五次元方向の依存性やスピノールの形は対称性からある程度決まる（自由度あり）

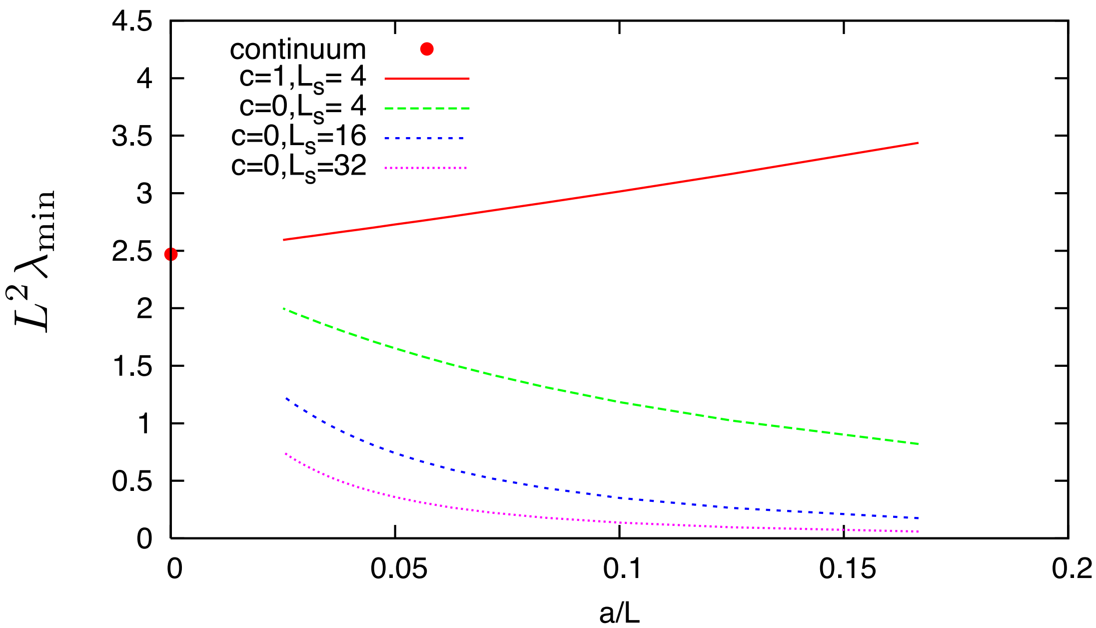
c : O(a)境界改良係数

最小固有モード

ST, PRD87(2013)114506

$$D^{\dagger}_{\mathrm{SF,DW}} D_{\mathrm{SF,DW}} \psi = \lambda \psi$$

正しいUniversality classにたどり着くにはc≠0が重要



$C = C' = 0$

massless

$\theta = 0$

$m_5 = 1$

最小固有モードの固有ベクトル

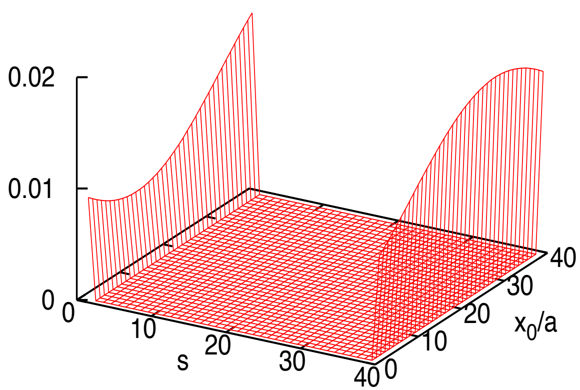
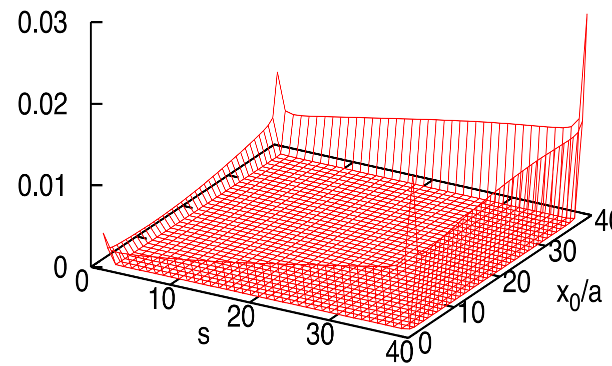
ST, PRD87(2013)114506

$$D^{\dagger}_{\mathrm{SF,DW}} D_{\mathrm{SF,DW}} \psi = \lambda \psi$$

$C = C' = 0 \quad L = T = L_s = 40$

$\theta = 0 \qquad m_5 = 1$

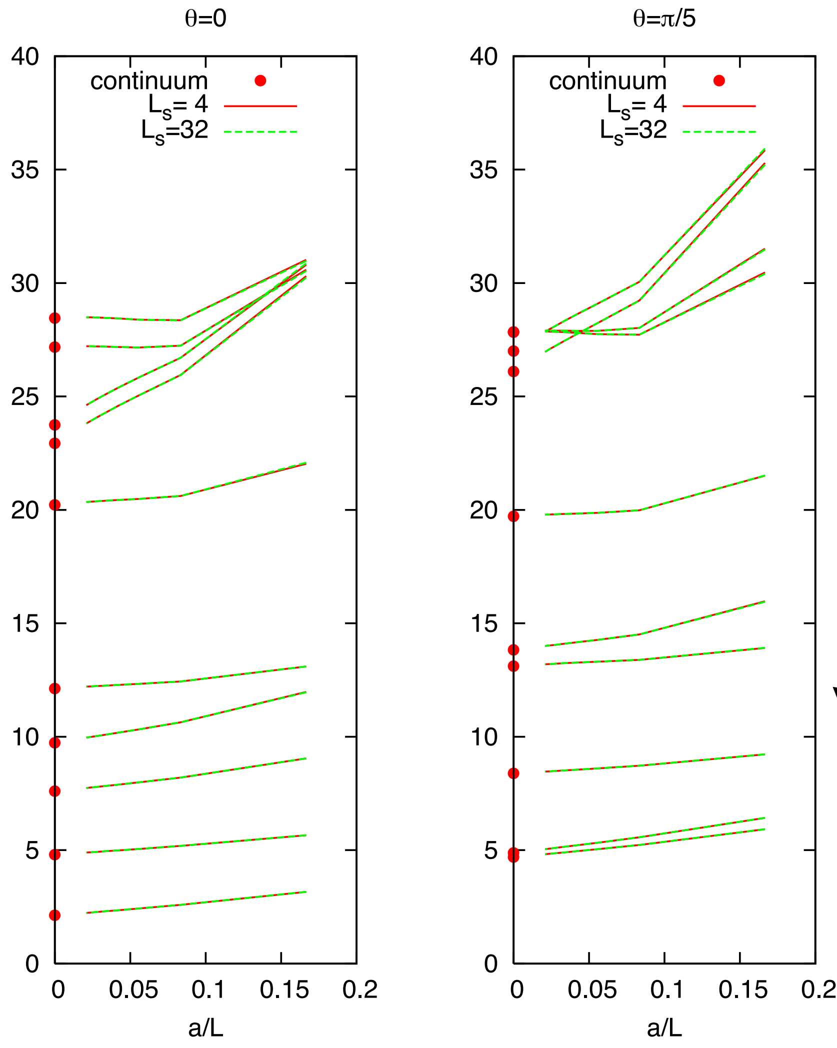
$\mathbf{p} = (0,0,0)$ massless

	$c = 1$	$c = 0$
$L^2 \lambda_{\mathrm{min}}$	2.59...	0.61
時間-s-運動量表示 $\lVert\psi(x_0, s)\rVert_{\mathrm{spin}}$		

$$L^2 \lambda^{\mathrm{cont.}}_{\mathrm{min}} = \pi^2/4 = 2.47...$$

物理的モード

ST, PRD87(2013)114506



物理的クォーク場

$$q(x) = P_L\psi(x,1) + P_R\psi(x,L_s)$$

$$\bar{q}(x) = \bar{\psi}(x,1)P_R + \bar{\psi}(x,L_s)P_L$$

物理的クォーク場のプロパゲータ

$$\langle q(x)\bar{q}(y)\rangle_{\mathrm{F}} = S_{\mathrm{q}}(x,y)$$

物理的クォーク場の演算子

$$D_{\mathrm{q}} = S_{\mathrm{q}}^{-1}$$

$L^2 D_{\mathrm{q}}^\dagger D_{\mathrm{q}}$ の固有値

Tree levelでのuniversality check

カイラル対称性の破れ

$$\Delta^{(L_s)} = \gamma_5 D_{\text{eff}}^{(L_5)} + D_{\text{eff}}^{(L_5)}\gamma_5 - 2D_{\text{eff}}^{(L_5)}\gamma_5 D_{\text{eff}}^{(L_5)}$$

有効4次元演算子

$$\det D_{\text{eff}}^{(L_5)} = \det\left[D_{\text{DW}}/D_{\text{PV}}\right]$$

バルクと境界からの両方のカイラル対称性の破れを含んでいる4次元演算子

$$\Delta^{(L_s)} \xrightarrow{L_s\to\infty} \Delta_{\text{B}}$$

境界近傍に指数関数的に局在したカイラル対称性の破れだけが残る

時間-運動量表示の4(T-1)次行列

$$\ln(||\Delta^{(L_s)}(x_0,y_0)||_{\text{spin}}),\quad L_s = 4$$

$C = C' = 0$

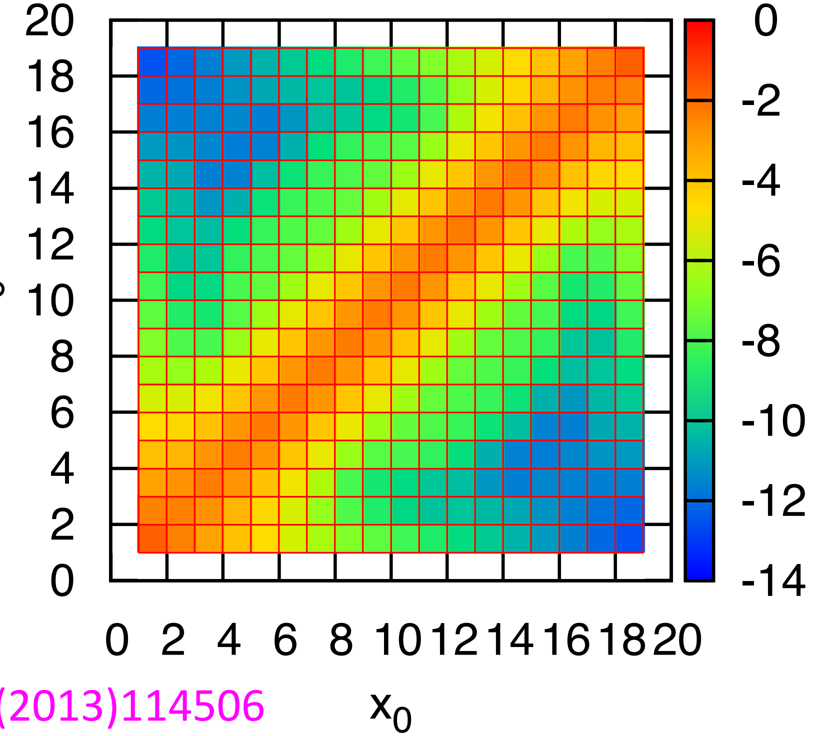
Free massless

$T = L = 20$

$\theta = 0$

$m_5 = 1$

$c = 1 \quad \mathbf{p} = (0,0,0)$



ST, PRD87(2013)114506

カイラル対称性の破れ

有効4次元演算子

$$\Delta^{(L_s)} = \gamma_5 D_{\text{eff}}^{(L_5)} + D_{\text{eff}}^{(L_5)}\gamma_5 - 2D_{\text{eff}}^{(L_5)}\gamma_5 D_{\text{eff}}^{(L_5)} \qquad \det D_{\text{eff}}^{(L_5)} = \det\left[D_{\text{DW}}/D_{\text{PV}}\right]$$

バルクと境界からの両方のカイラル対称性の破れを含んでいる4次元演算子

$$\Delta^{(L_s)} \xrightarrow{L_s\to\infty} \Delta_{\text{B}}$$

境界近傍に指数関数的に局在したカイラル対称性の破れだけが残る

$C = C' = 0$

Free massless

$T = L = 20$

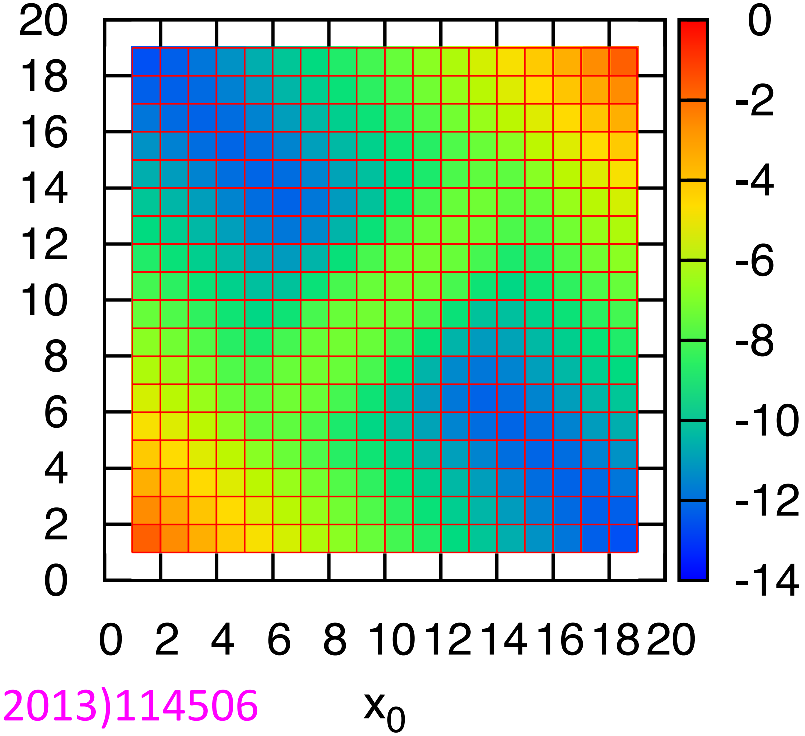
$\theta = 0$

$m_5 = 1$

$c = 1 \quad \mathbf{p} = (0,0,0)$

時間-運動量表示の4(T-1)次行列

$\ln(||\Delta^{(L_s)}(x_0, y_0)||_{\text{spin}}), \quad L_s = 12$



ST, PRD87(2013)114506

カイラル対称性の破れ

有効4次元演算子

$$\Delta^{(L_s)} = \gamma_5 D_{\rm eff}^{(L_5)} + D_{\rm eff}^{(L_5)}\gamma_5 - 2D_{\rm eff}^{(L_5)}\gamma_5 D_{\rm eff}^{(L_5)} \qquad \det D_{\rm eff}^{(L_5)} = \det\left[D_{\rm DW}/D_{\rm PV}\right]$$

バルクと境界からの両方のカイラル対称性の破れを含んでいる4次元演算子

時間-運動量表示の4(T-1)次行列

$$\Delta^{(L_s)} \xrightarrow{L_s\to\infty} \Delta_{\rm B}$$

境界近傍に指数関数的に局在したカイラル対称性の破れだけが残る

$C = C' = 0$

Free massless

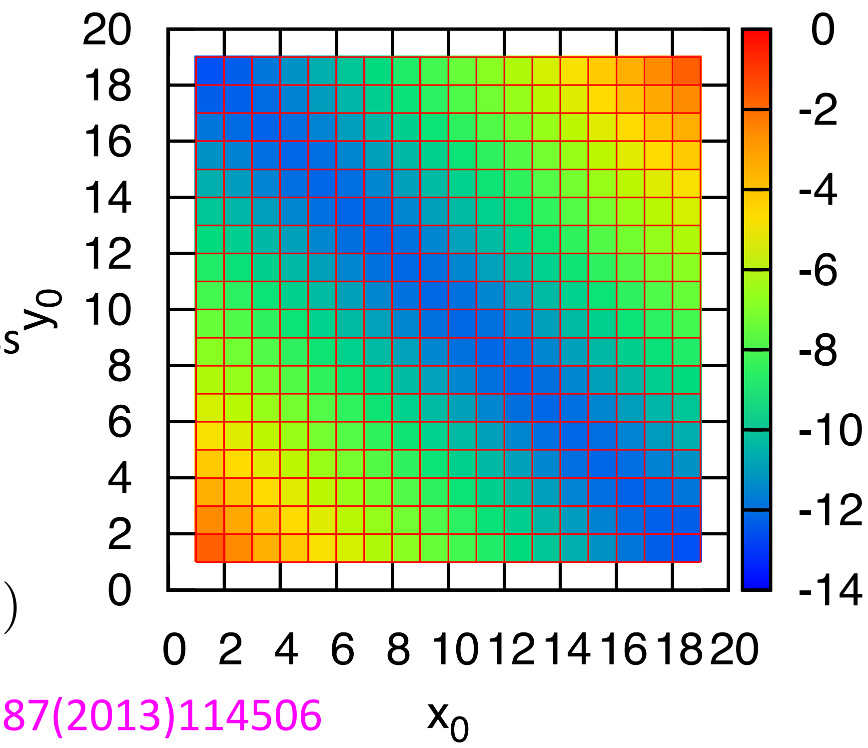
$T = L = 20$

$\theta = 0$

$m_5 = 1$

$c = 1 \quad \mathbf{p} = (0,0,0)$

$\ln(||\Delta^{(L_s)}(x_0,y_0)||_{\rm spin}),\ \ L_s = 24$



ST, PRD87(2013)114506

1-loop解析　繰り込み可能か？

SF coupling

$$\bar{g}^2_{\mathrm{SF}}(L) \quad = \quad (\mathrm{normalization}) \left[\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \eta} \right]^{-1}$$

$$= \quad g_0^2 \left[1 + m_1(L) g_0^2 + O(g_0^4) \right]$$

1-loop係数

$$m_1(L)_{\mathrm{F}} = A_0 + B_0 \ln(L/a) + O(a/L)$$

log発散の係数

$$B_0 = 2b_0^{\mathrm{F}} = -\frac{1}{12\pi^2}$$

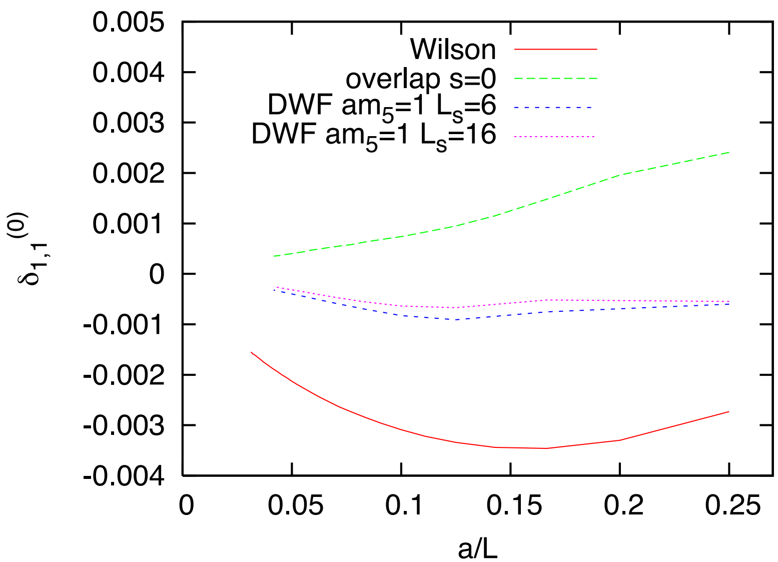
となることを4,5桁でoverlapとDWで確認済

→ 1-loopで繰り込みOK

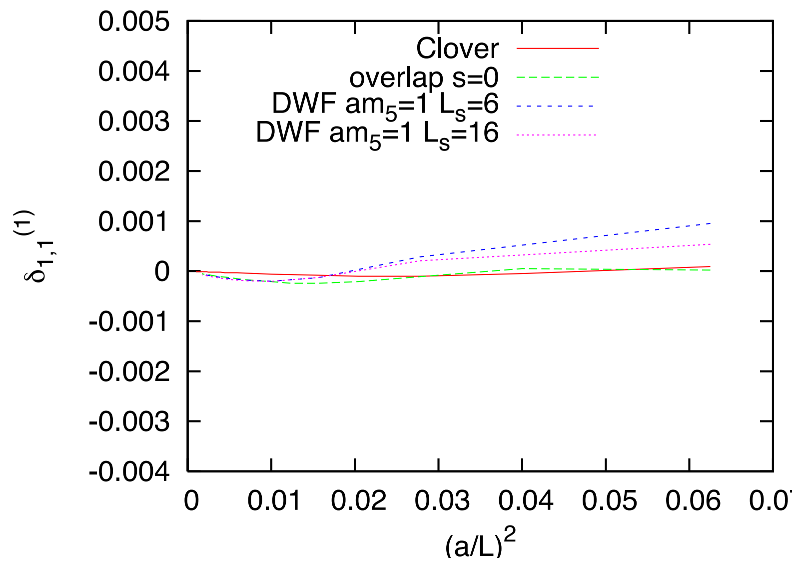
Lattice artifact at 1-loop

$$\delta(u, a/L) = \frac{\Sigma(u, a/L) - \sigma(u)}{\sigma(u)} = \delta_1(a/L)u + O(u^2)$$

δ_1のFermionの部分↓



tree O(a)改良あり



1-loop O(a)改良あり

SF上のカイラルフェルミオンの展望

すぐにできること:カイラル凝縮の非摂動繰り込み $Z_S = Z_P$

N_f=2

ALPHA NPB729(2005)117

JLQCD PRL98(2007)172001

$$\Sigma_{\mathrm{RGI}} = [\mathrm{PT}(\mu_{\mathrm{high}})] \times [\mathrm{NPR}(\mu_{\mathrm{high}}, \mu_{\mathrm{low}})] \times Z_{\mathrm{P}}(g_0, \mu_{\mathrm{low}}) \times \Sigma(g_0)$$

摂動計算

Missing piece!!!

Open boundary

トポロジーが変化しやすい Luescher & Shaefer JHEP1107(2011)036

まとめ

- SFでやることはたくさんあります
- PDGへの近道かも？しかも超王道
- 若手の参入を期待しています
- こだわりの強い人向きかも？