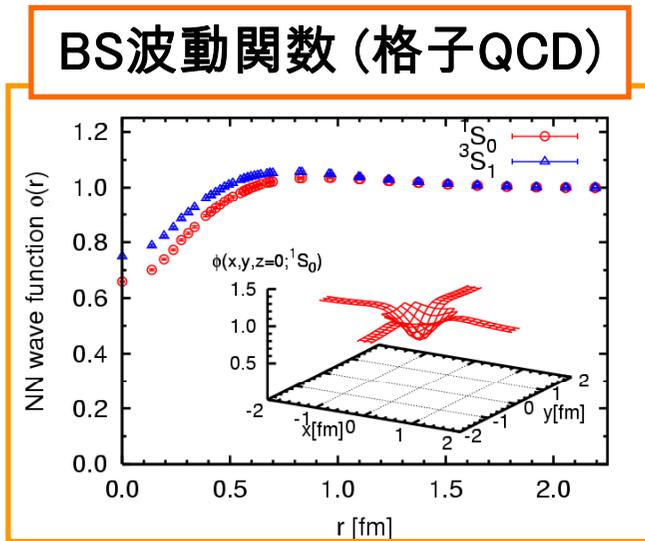
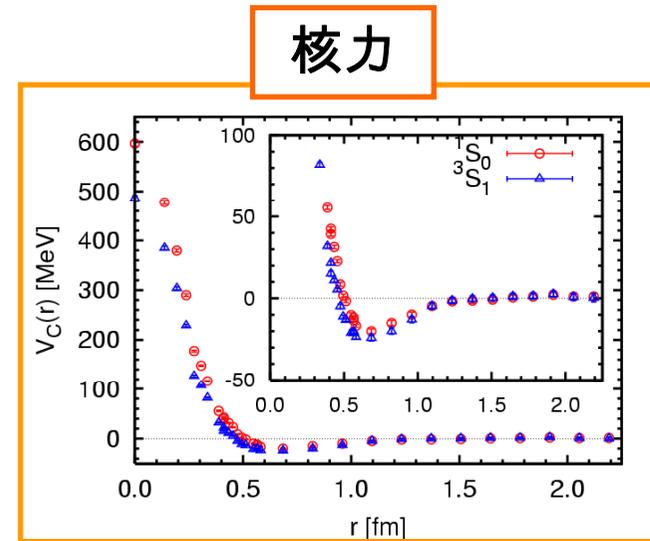


格子QCDによるバリオン間相互作用の研究

石井理修 (東京大学)
BBILQCD



Schrodinger方程式



特徴:

1. 散乱位相差を求めるLuscherの有限体積の方法の拡張形。
CP-PACS Coll., PRD71,094504(2005). (BS波動関数 → 散乱位相差)
2. ポテンシャルという概念を利用して、Luscherの散乱位相差を補完する。
3. 散乱実験に忠実な現実的バリオン間ポテンシャルを理論的に格子QCDを用いて提供することが可能になる。

Ishii,Aoki,Hatsuda,PRL99,022001(' 07).

Nemura,Ishii,Aoki,Hatsuda, PLB673,136(' 09).

Aoki,Hatsuda,Ishii,PTP123,89(' 10).

次世代スパコン利用へ向けて、

➤ 核子間力(核力)

- ◆ LS力、高次微分項、p-waveの核力
- ◆ 3体力
- ◆ 有効理論での使用

➤ ハイペロン間力

- ◆ flavor SU(3)極限で、ハイペロン力のフレーバー構造を概観する。
- ◆ 多様なハイペロン力: $S=-1, -2, \dots$
- ◆ 結合チャンネルのハイペロン力。
- ◆ 反対称LS力を含む高次微分項。

今回、PACS-CS/T2Kで取り上げた項目。

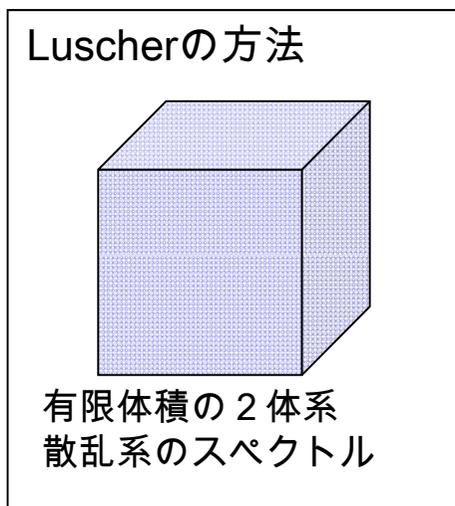
➤ 有効理論での使用。

[散乱長(ポテンシャルの収束性)の問題]

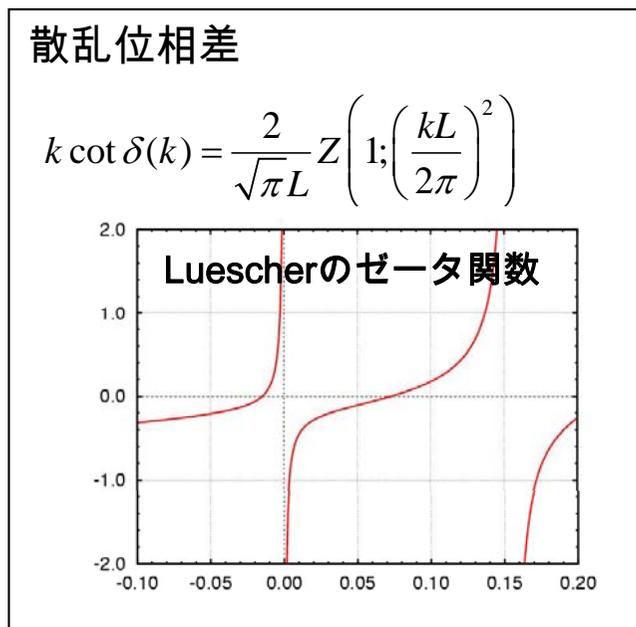
➤ 3体力。

背景(有効理論での使用に関する問題)

(4)



漸近運動量 $|k|$

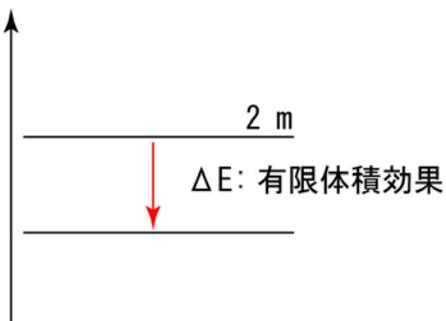


- 時間方向の相関から求める方法
(2核子系のエネルギースペクトルから)

$$R(t) \equiv C_{NN}(t) / (C_N(t))^2$$

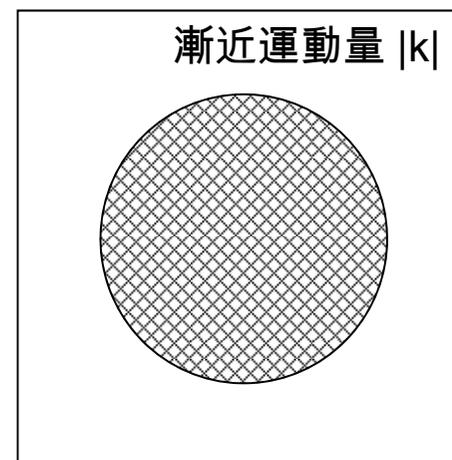
$$\sim A' \exp(-\Delta E t)$$

$$\Delta E(\vec{k}) \equiv 2 \left(\sqrt{m^2 + \vec{k}^2} - m \right)$$



- 空間方向の相関から求める方法
(BS波動関数の空間方向長距離漸近形から)

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \equiv \langle 0 | N(\vec{x}) N(\vec{y}) | N(\vec{k}) N(-\vec{k}), in \rangle$$



時間相関 vs 空間相関

- 4点関数の時間相関 → BS波動関数のエネルギー

$$C_{NN}(\vec{x}, t) \equiv \langle 0 | N(\vec{x}, 0) N(\vec{0}, t) \cdot \bar{N}(t=0) \bar{N}(t=0) | 0 \rangle$$

$$= \sum_n \langle 0 | N(\vec{x}) N(\vec{0}) | n \rangle e^{-E_n t} \langle n | \bar{N} \bar{N} | 0 \rangle$$

$$E = 2E(\vec{q})$$

$$E(\vec{q}) \equiv \sqrt{m^2 + \vec{q}^2}$$

- BS波動関数の長距離漸近形

$$\psi_{\vec{q}}(\vec{x}) \equiv \langle 0 | N(\vec{x}) N(\vec{0}) | N(\vec{q}) N(-\vec{q}), in \rangle$$

reduction formulaにより、T行列と関係。

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E(\vec{p})} \langle 0 | N(\vec{x}) | N(\vec{p}) \rangle \cdot \langle N(\vec{p}) | N(\vec{0}) | N(\vec{q}) N(-\vec{q}), in \rangle + I(\vec{x})$$

$$\square Z \left(e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2E(\vec{p}) 4E(\vec{q}) \cdot (E(\vec{p}) - E(\vec{q}) - i\epsilon)} T(\vec{p}, \vec{q}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right)$$

$$\square Z \left(e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} + \frac{1}{2i} \left(e^{2i\delta_0(s)} - 1 \right) \frac{e^{iqr}}{qr} \right) + \dots \text{ (長距離の漸近形)}$$

cf) C.-J.D.Lin et al., NPB619,467(2001).
CP-PACS Coll., PRD71,094504(2005).

- ➔ 十分長距離で次のHelmholtz 方程式を満たす。

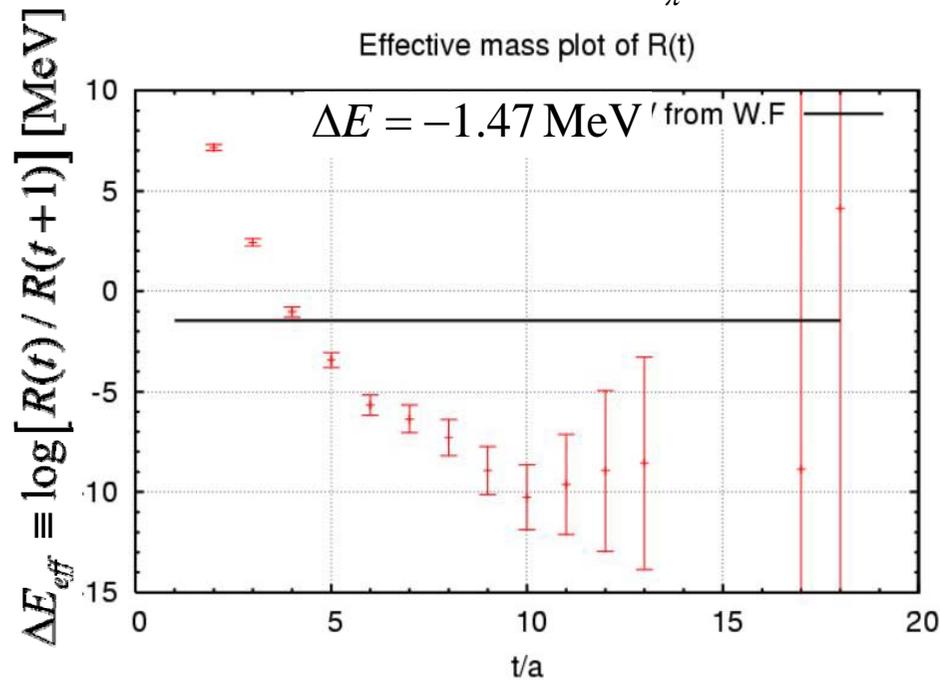
$$\left(\vec{\nabla}^2 + q^2 \right) \psi_{\vec{q}}(\vec{x}) = 0$$

- 時間相関から計ったエネルギー E と空間相関から計った漸近運動量 q は、実際に consistent であるべき。

現実の計算

(6)

$$m_\pi \square 700 \text{ MeV}$$



$$R(t) \equiv \frac{\sum_{\vec{x}} G_{NN}(\vec{x}, t)}{G_N(\vec{x}, t)^2} \cong A e^{\Delta E \cdot t} \quad \text{for large } t.$$

散乱長:

$$a_0 \sim 4.8(5) \quad \text{fm [時間相関]}$$

$$a_0 \sim 0.131(18) \quad \text{fm [空間相関]}$$

考えられる原因は、ground state saturation

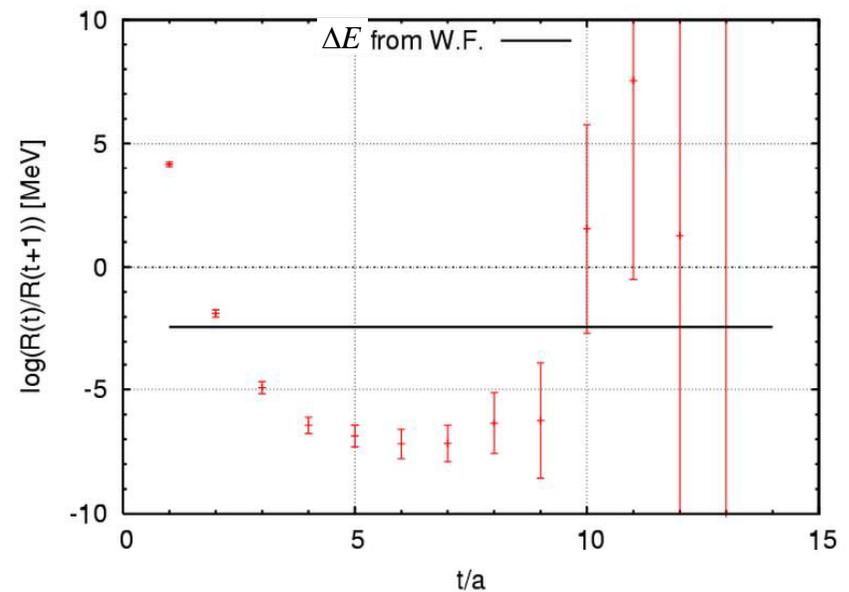
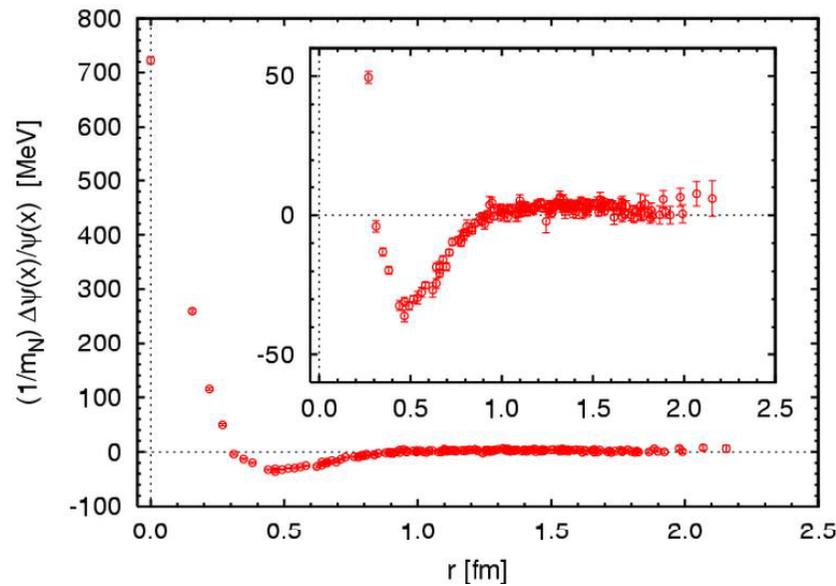
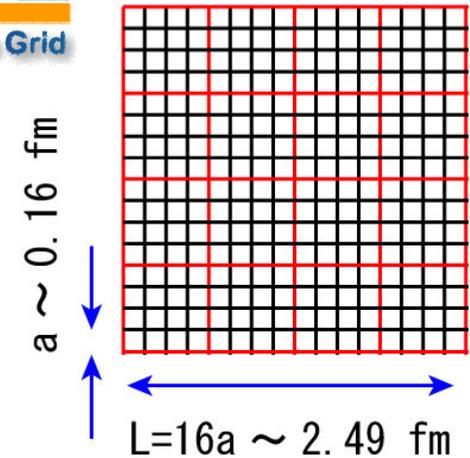
原理的には t を大きくすれば解決できる問題だが、
バリオン系は統計が悪く、あまり大きな t を使えない。

高統計でみるためのゲージ配位

(7)

RC16x32-B1950K013750C1530シリーズ (599個)
(generated by CP-PACS Coll.)

- $16^3 \times 32$, $\beta=1.95$, $\kappa_{ud}=0.13750$ (2 flavor)
- $a = 0.1555$ (fm), $1/a \sim 1267$ MeV, $L=16a=2.489$ fm
- $m_{\text{pi}} \sim 1133$ MeV
 $m_N \sim 2150$ MeV
- quark massが非常に重いため、相対的空間体積は意外に大きい。

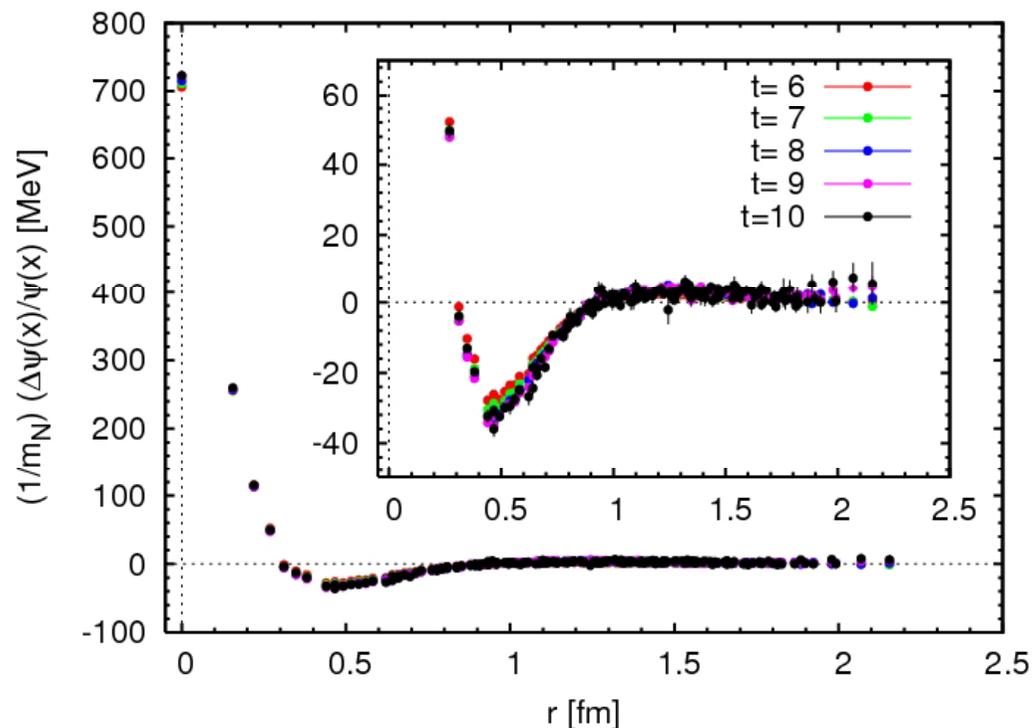


ground state saturation

(8)

$$\begin{aligned}
 & C_{NN}(\vec{x} - \vec{y}, t) \\
 & \equiv \langle 0 | T[N(\vec{x}, t)N(\vec{y}, t) \bar{N}(t=0)\bar{N}(t=0)] | 0 \rangle \\
 & = \sum_n \psi_n(\vec{x} - \vec{y}) \cdot A_n \exp(-E_n t) \\
 & \square \psi_n(\vec{x} - \vec{y}) \cdot A_0 e^{-E_0 t}
 \end{aligned}$$

ポテンシャルの時間依存性



$$\begin{aligned}
 & V_C(\vec{r}) \\
 & \equiv \frac{(\cdot_0 - H_0)\psi_0(\vec{r})}{\psi_0(\vec{r})} \square \frac{(\cdot_0 - H_0)C_{NN}(\vec{r}, t)}{C_{NN}(\vec{r}, t)}
 \end{aligned}$$

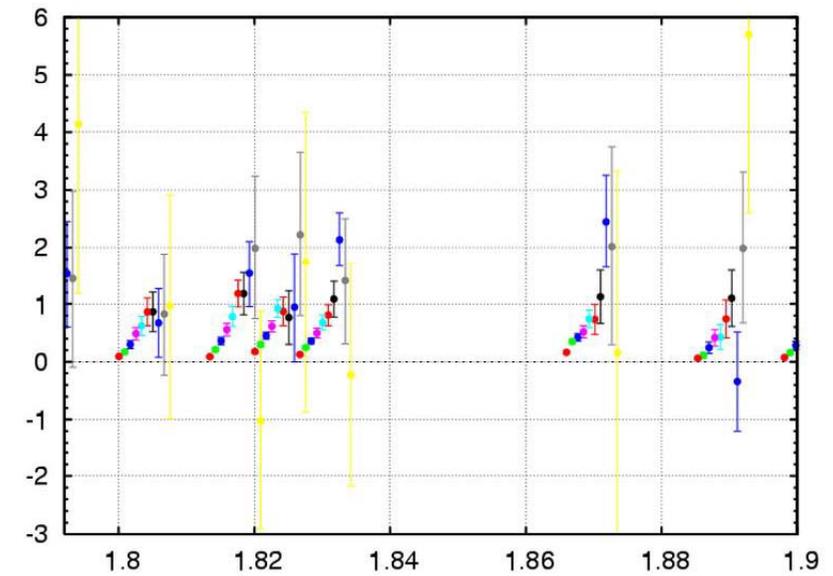
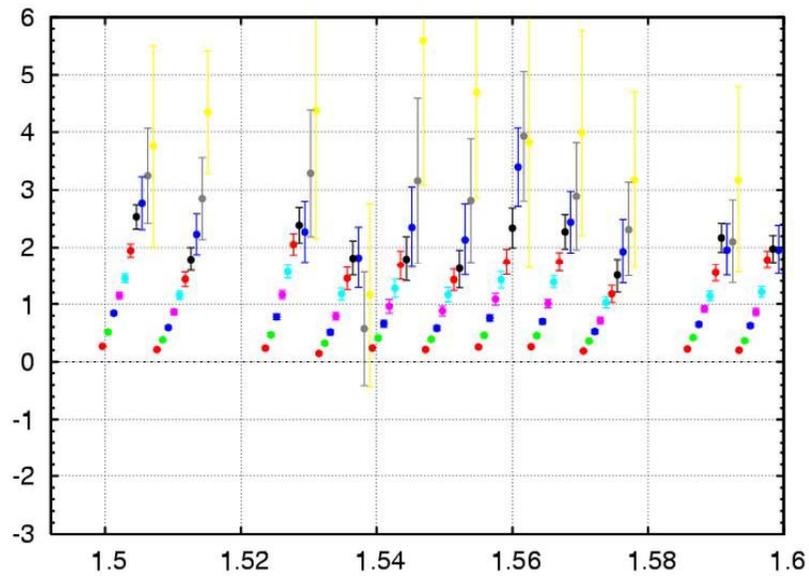
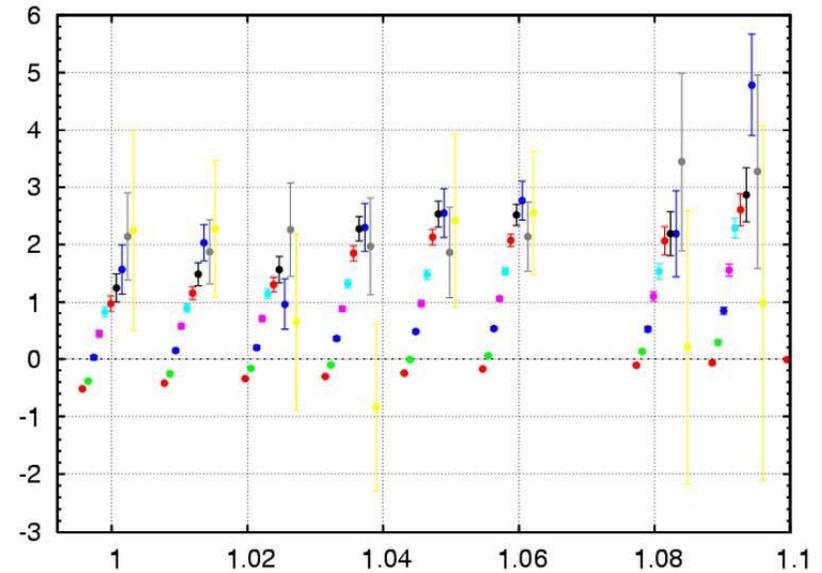
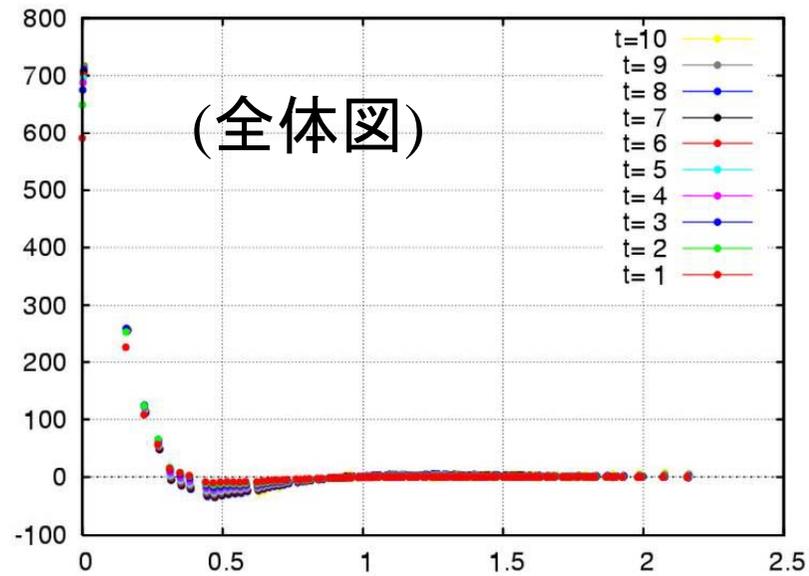
$$E_0 = 2\sqrt{m_N^2 + \vec{k}^2} \Leftrightarrow \cdot_0 \equiv \frac{\vec{k}^2}{m_N}$$

おおむねよく収束しているように見えるが。。。

ground state saturation(2)

(9)

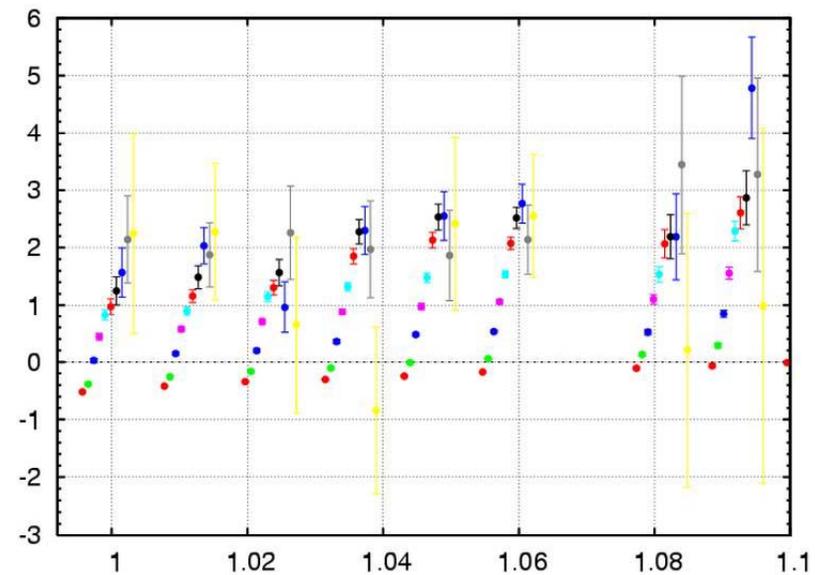
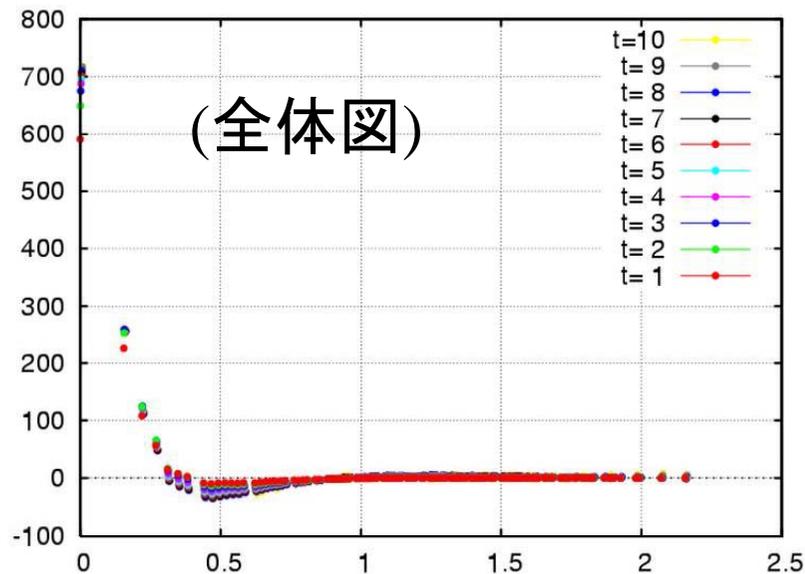
potentialの時間依存性を拡大して高統計で見る。



ground state saturation(2)

(10)

potentialの時間依存性を拡大して高統計で見る。



- 長距離部分が非常にゆっくり持ち上がっている。
- 全体に比べるとわずかな量だが、これが非常に強く効く物が存在する。
 - ➔ **散乱長、束縛状態**
 - 散乱長はこの値が安定するまでどんどん強くなる。
(体積要素を伴う ➔ 少しの変化でも大きな違いに)
- 有効理論での使用の前に有効な解決策が必要。

重要

定性的には満足しているが、定量的使用のためには解決が必須。

散乱長の決定

(11)

「空間相関を収束させる」 > 「時間相関を収束させる」 (難易度)

➤ 空間相関を収束させる。

↔ 空間上の**すべての点**の ground state saturation を達成する。

$$C_{NN}(\vec{x}, t) = \sum_n \psi_n(\vec{x}) \cdot a_n e^{-E_n t} \rightarrow \psi_0(\vec{x}) \cdot a_0 e^{-E_0 t}$$

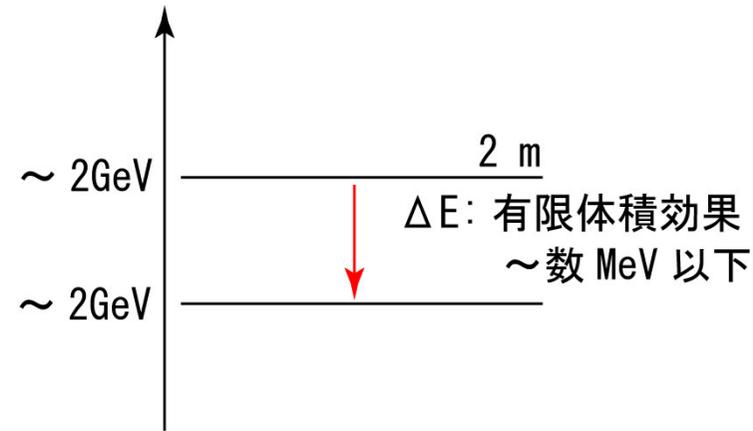
➤ 時間相関を収束させる。

↔ 空間方向に**特定の積分値**の ground state saturation を達成する。

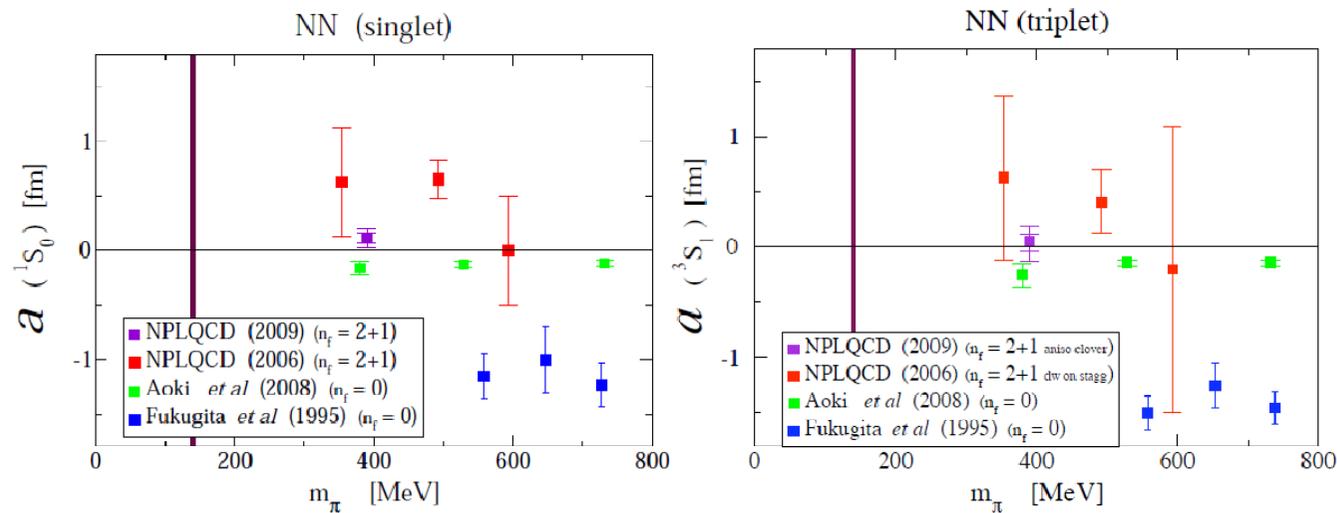
$$\begin{aligned} C_{NN}(t) &\equiv \int d^3x C_{NN}(\vec{x}, t) \\ &= \sum_n b_n e^{-E_n t} \quad b_n \equiv a_n \int d^3x \psi_n(\vec{x}) \end{aligned}$$

散乱長の決定(2)

- 比較的容易な時間相関からground state energy(散乱長)を決めてみる。
- 空間相関からの方法よりも簡単だが、それでも相当に難しい。
 - ◆ 数 GeV – 数GeV = 数MeV以下を正確に測定しなければいけない。



- ◆ 現在においてもなお、散乱長に関してはconflictが存在する。
斥力(NPLQCD) v.s. 引力(Fukugita et al, 我々)

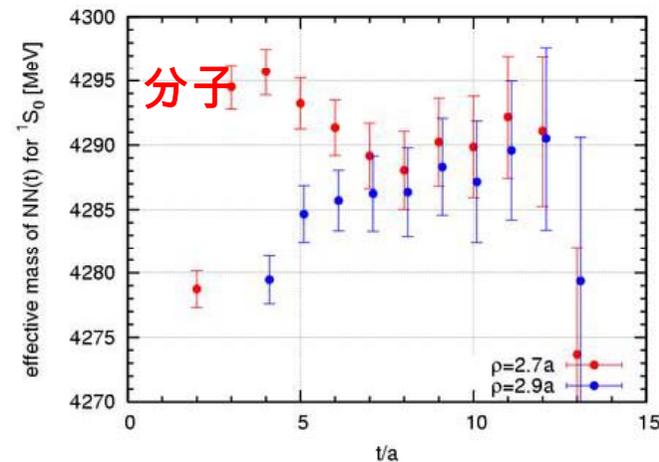
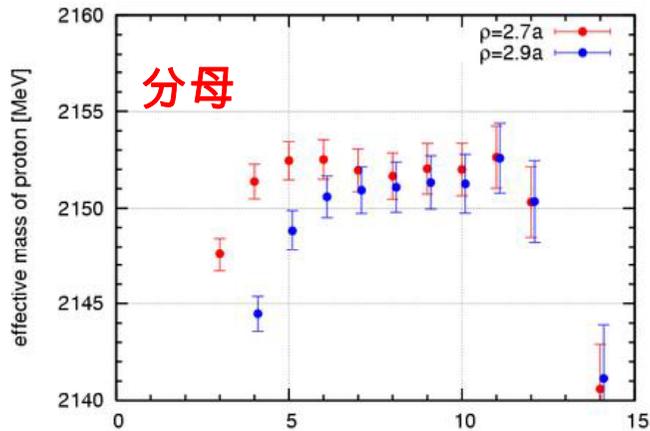


散乱長の決定(3)

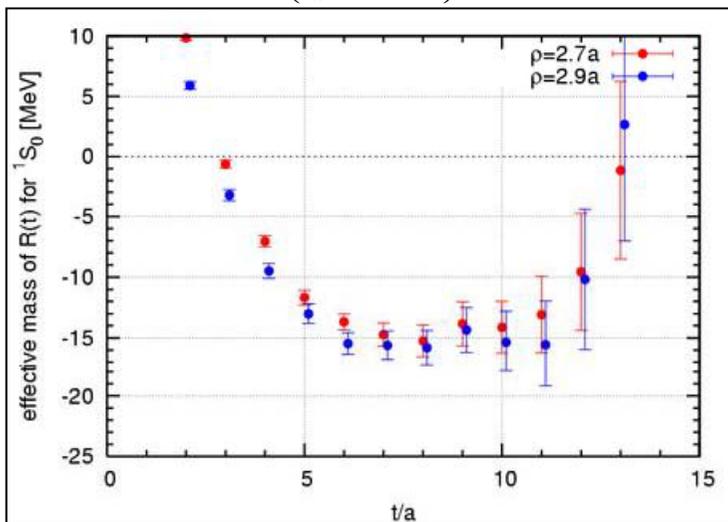
(13)

➤ smearing source: size ρ を調整することで、非常に早い段階から plateau を出現させることができる。

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} \exp\left[-\frac{|\vec{x} - L\vec{n}|^2}{\rho^2}\right]$$



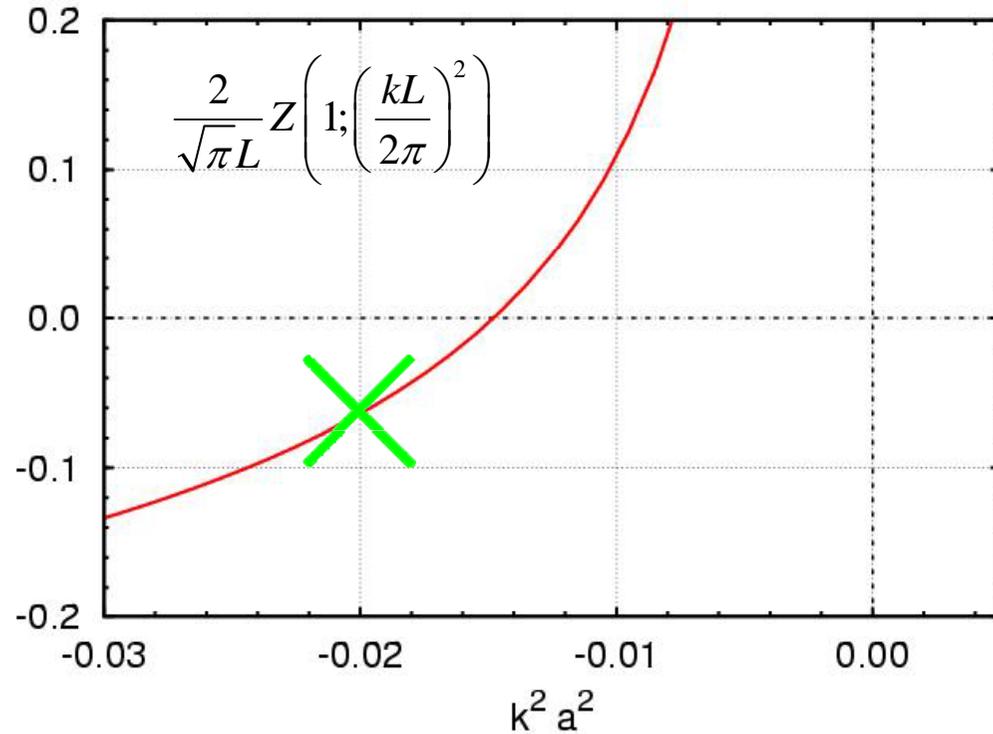
$$R(t) \equiv \frac{\sum_{\vec{x}} G_{NN}(\vec{x}, t)^{t/a}}{\left(\sum_{\vec{x}} G_N(\vec{x}, t)\right)^2} \square A \exp(\Delta E t)$$



- $t \geq 7$ に共通の plateau が出現。
この領域での $R(t)$ から、 $\Delta E \sim -15$ MeV
- しかし、分子、分母それぞれの plateau の quality は、せいぜい ~ 5 MeV。
- これらを考慮して、
 $\Delta E \sim -15$ MeV (~ 10 MeV 前後の不定性)

$\Delta E \sim -15 \text{ MeV}$ (中心値)

$L \sim 2.5 \text{ fm}$ で、 $\Delta E \sim -15 \text{ MeV}$ はわりあい大きな値。
(単体で散乱長を求めることはできない)



k^2 の展開が破綻。
下の公式を使って散乱長を
求められない。

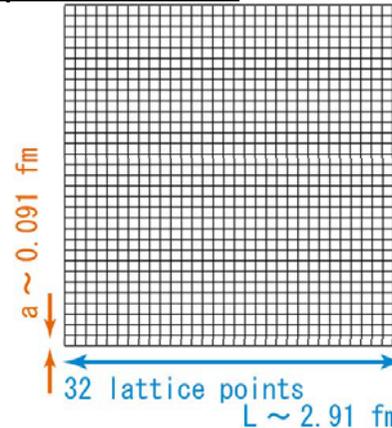
$$\frac{2}{\sqrt{\pi L}} Z\left(1; \left(\frac{kL}{2\pi}\right)^2\right) = k \cot(\delta(k)) = \frac{1}{a} + O(k^2)$$

詳しい状況を把握するため、
いくつか体積を変えた計算が必要。

散乱長の決定 (PACS-CSゲージ配位)

PACS-CS coll. is generating 2+1 flavor gauge configurations in significantly light quark mass region on a large spatial volume

- 2+1 flavor full QCD [PACS-CS Coll. PRD79(2009)034503].
- Iwasaki gauge action at $\beta=1.90$ on $32^3 \times 64$ lattice
- O(a) improved Wilson quark (clover) action with a non-perturbatively improved coefficient $c_{SW}=1.715$
- $1/a=2.17$ GeV ($a \sim 0.091$ fm). $L=32a \sim 2.91$ fm



PACS-CS



Available through ILDG/JLDG

$\kappa_{ud}=0.13700$ $\kappa_s=0.13640$	$M_{pi}=701$ MeV	$L=2.9$ fm
$\kappa_{ud}=0.13727$ $\kappa_s=0.13640$	$M_{pi}=570$ MeV	$L=2.9$ fm
$\kappa_{ud}=0.13754$ $\kappa_s=0.13640$	$M_{pi}=411$ MeV	$L=2.9$ fm
$\kappa_{ud}=0.13754$ $\kappa_s=0.13660$	$M_{pi}=384$ MeV	$L=2.9$ fm
$\kappa_{ud}=0.13770$ $\kappa_s=0.13640$	$M_{pi}=296$ MeV	$L=2.9$ fm
$\kappa_{ud}=0.13781$ $\kappa_s=0.13640$	$M_{pi}=156$ MeV	$L=2.9$ fm

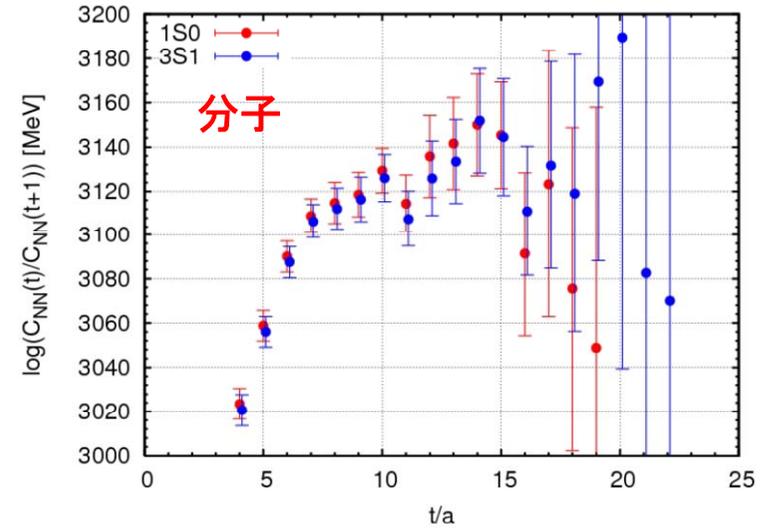
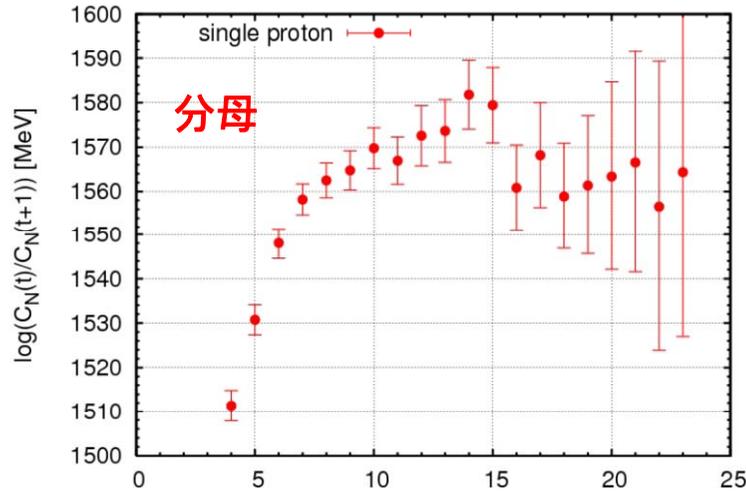


PACS-CS Coll. is currently generating 2+1 flavor gauge config's with **physical m_{pi}** on **$L \sim 6$ fm** lattice.

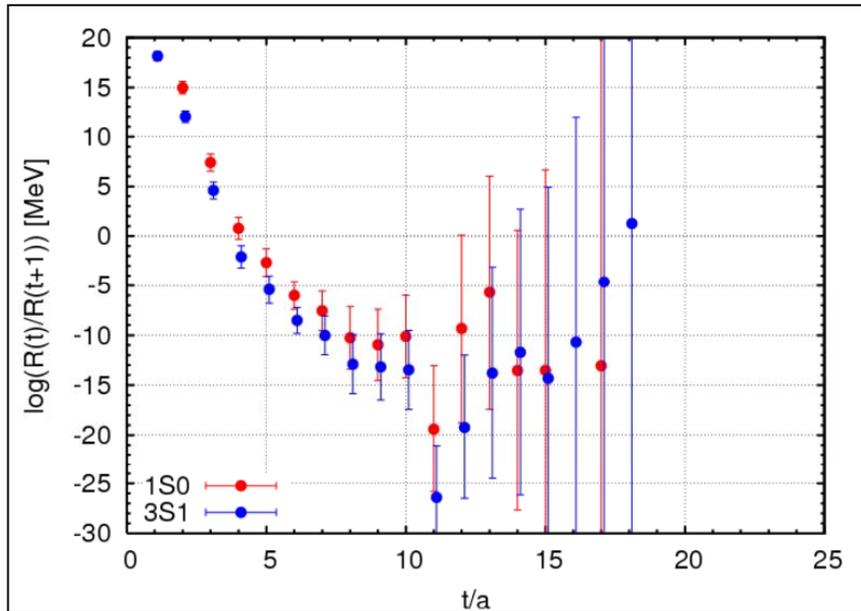
super computer T2K



散乱長の決定(PACS-CSゲージ配位): NN



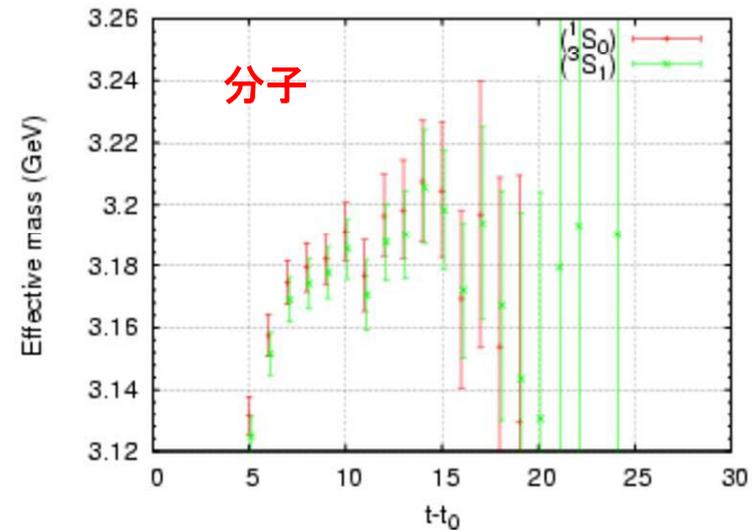
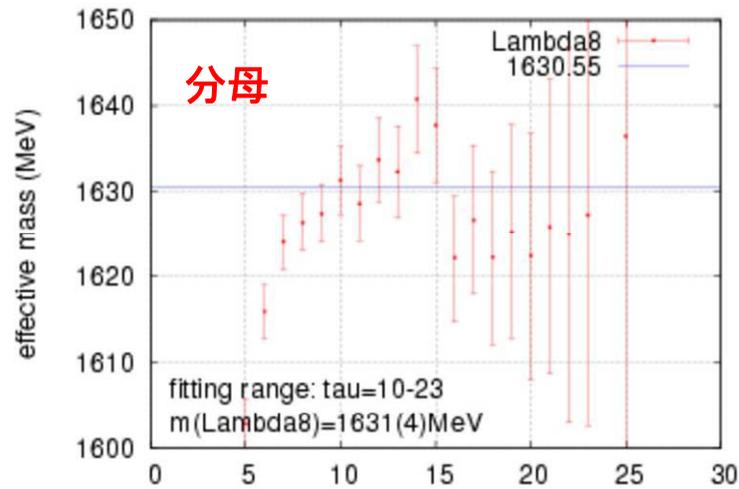
$$R(t) \equiv \frac{\sum_{\vec{x}} C_{NN}(\vec{x}, t)}{\left(\sum_{\vec{x}} C_N(\vec{x}, t) \right)} \square A \exp(\Delta E t)$$



- 統計が足りず、はっきりしたplateauが見えない。
- 分子と分母別々に、安定したplateau(精度 1MeV 程度以下)が現れるまで統計を上げる。
- その上で R(t)から ΔE を求め、散乱長を計算する。

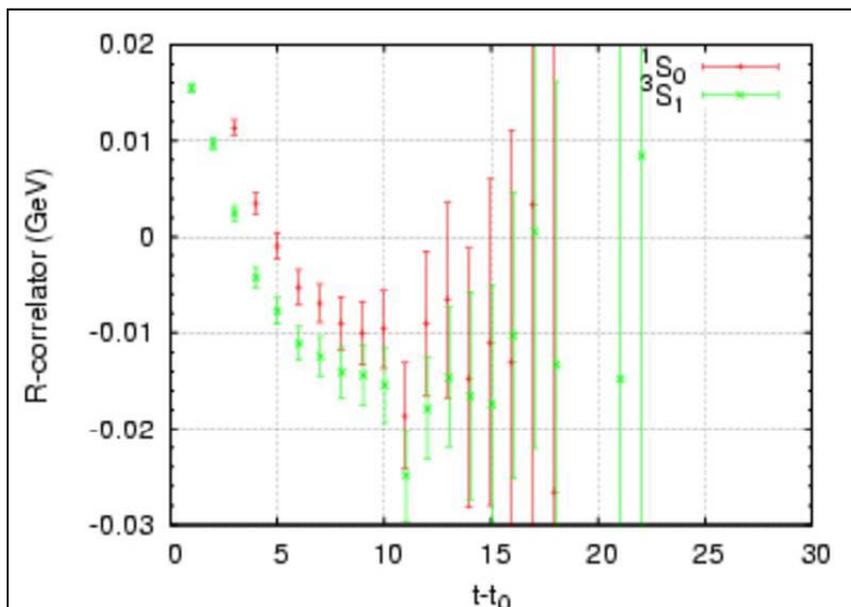
散乱長の決定(PACS-CSゲージ配位): NΛ

(17)



$$R(t) \equiv \frac{\sum_{\vec{x}} C_{NN}(\vec{x}, t)}{\left(\sum_{\vec{x}} C_N(\vec{x}, t) \right)} \square A \exp(\Delta E t)$$

- 統計が足りず、はっきりしたplateauが見えない。
- 分子と分母別々に、安定したplateau(精度 1MeV 程度以下)が現れるまで統計を上げる。
- その上で R(t)からΔEを求め、散乱長を計算する。



Three Nucleon Force (TNF)

Motivation

- Few-body calc of light nuclei \longrightarrow
- Saturation density/energy of nuclear matter
 - EOS of neutron star \longrightarrow
- Any puzzle in scatt., Drip line in nuclear chart

Attractive TNF
necessary

Repulsive TNF
also necessary

Our approach

- **Extension of HAL strategy to 3N system**

- Calc 6pt func \rightarrow BS amp. of 3N

$$\psi(\vec{r}, \vec{\rho}) = \langle 0 | N(\vec{x} + \vec{r}) N(\vec{x}) N(\vec{x} + \vec{r}/2 + \vec{\rho}) | 3N \rangle$$

- Obtain TNF through

$$(E - H_0^r - H_0^\rho) \psi(\vec{r}, \vec{\rho}) = \left[\sum_{i < j} V_{ij}(\vec{r}_{ij}) + V_{TNF}(\vec{r}, \vec{\rho}) \right] \psi(\vec{r}, \vec{\rho})$$

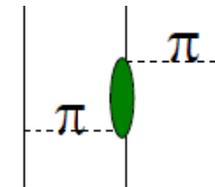
- **Straightforward calc impossible** \leftarrow by 2N calc

- Volume factor & Wick contractions \rightarrow X $O(10^7)$ expensive

- **Effective 2N potential in 3N system** $\phi(\vec{r}) \equiv \int d\vec{\rho} \psi(\vec{x}, \vec{\rho})$

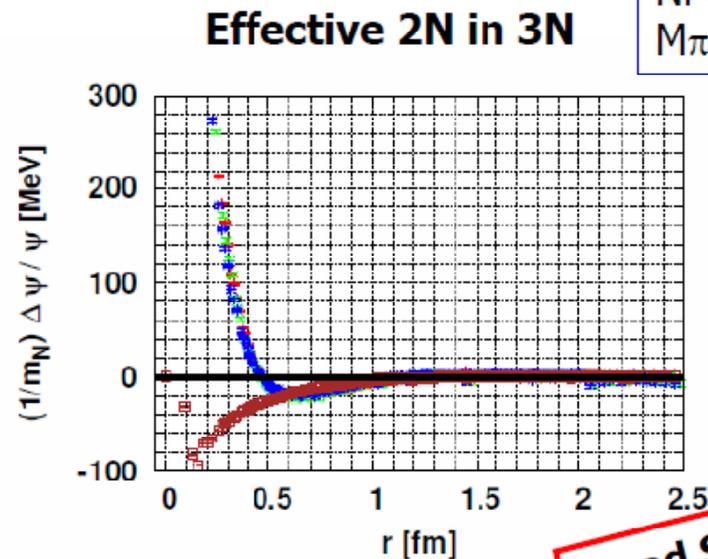
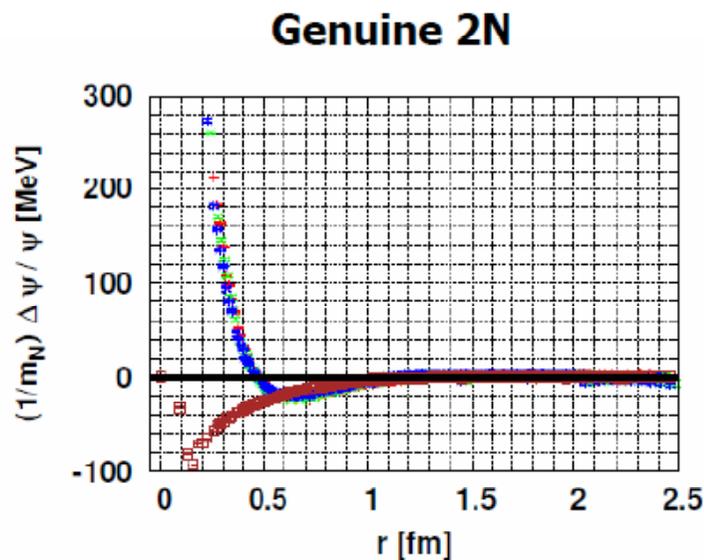
$$\begin{aligned} (E - H_0^r) \phi(\vec{r}) &= [V_{12}(\vec{r}) + \delta V_{eff}(\vec{r})] \phi(\vec{r}) \\ &= [V_{12}(\vec{r}) \phi(\vec{r}) + \int d\vec{\rho} (V_{13}(\vec{r}, \vec{\rho}) + V_{23}(\vec{r}, \vec{\rho}) + V_{TNF}(\vec{r}, \vec{\rho})) \phi(\vec{r}, \vec{\rho})] \end{aligned}$$

- Use symmetry & non-rela op for source \rightarrow reduced contractions



Lat cal. setup & results

- Dynamical clover fermion + RG improved gauge configs
 - $N_f=2$ $V=16^3 \times 32$, $L=2.5\text{fm}$, $M_\pi = 1.13\text{GeV}$ (CP-PACS)
 - $N_f=2+1$ $V=32^3 \times 64$, $L=2.9\text{fm}$, $M_\pi = 0.57, 0.70\text{GeV}$ (PACS-CS)
 - **We calculate Triton as 3N system**

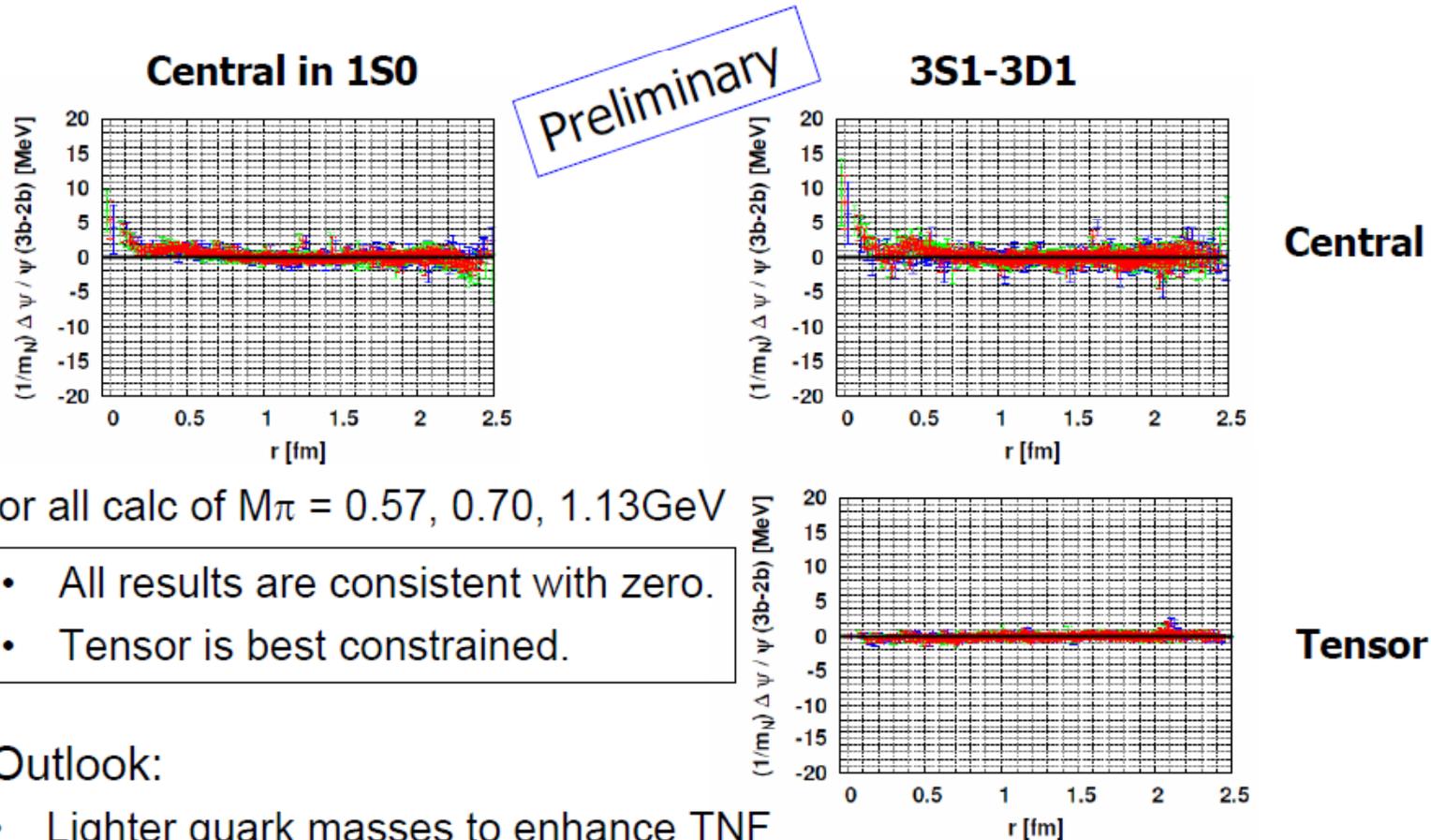


$N_f=2+1$
 $M_\pi=0.7\text{GeV}$

Red: central 1S0 Green: eff. central in 3S1-3D1
Blue: central in 3S1-3D1 Brown: tensor in 3S1-3D1

Good S/N
even for 3N!

Potential difference (3N-2N)



Outlook:

- Lighter quark masses to enhance TNF
- More specific spacial configurations of 3N system are under investigation to access TNF

$N_f=2+1$
 $M_\pi=0.7\text{GeV}$

まとめ

➤ 散乱長の問題

BS波動関数の長距離部分の収束が非常に緩慢であることを見た。

- ◆ ground state saturationが甘いことに起因する。
(兆候: 時間方向の相関と空間方向の相関から計算した散乱長の値が合わない)
- ◆ ここから作られるポテンシャルは、
 - 定性的には収束している。
 - 定量的な応用のためには、もっと厳しい収束条件を課す必要がある。
 - わずかでも長距離部分の変化は、体積要素と相まって、散乱長や束縛状態への影響が非常に大きい。

◆ 対策

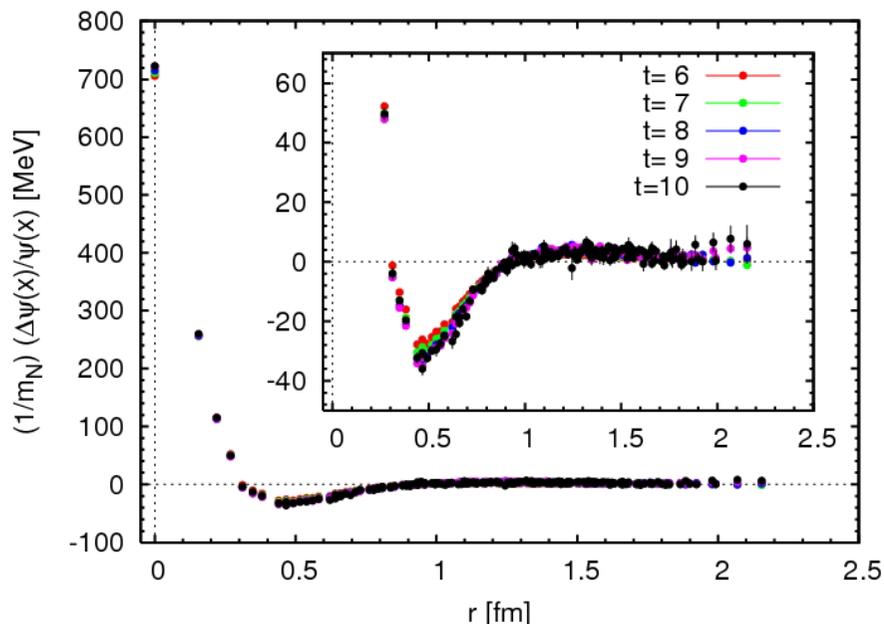
- 散乱長 (ground stateのエネルギー) を確定させる。(進行中)
- ground stateとoverlapのよい sourceを探す。
- これが困難な場合、長距離部分に散乱長等のconstraintを課して外挿する。
(できるだけ避けたい)

➤ 3体力の問題

- ◆ 現行のスーパーコンピュータでは、直接計算は困難。(次世代に期待)
- ◆ 3核子中の有効2体核力から手をつけた。
現在、真空中の2体力からの変化はみられていない。

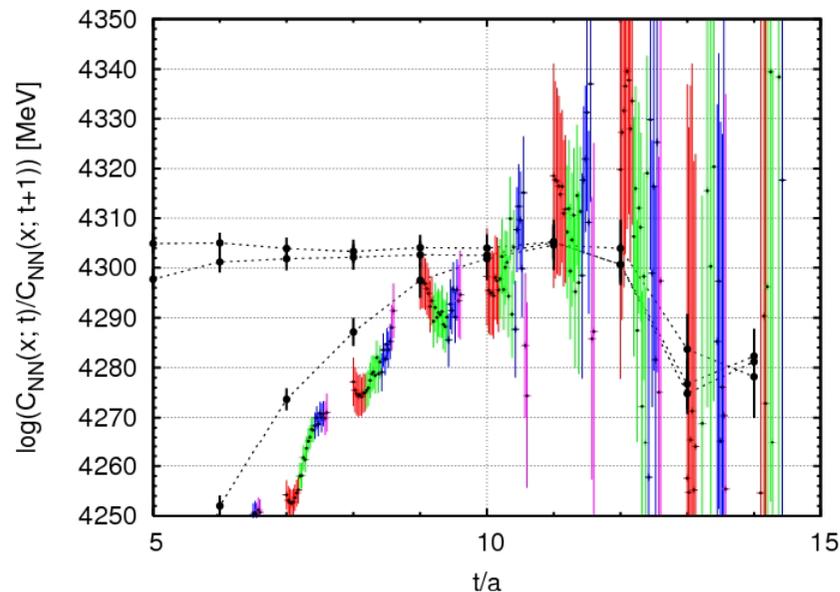
back up

ポテンシャルの時間依存性



おおむねよく収束している。

核子 4 点関数のsink各点ごとの effective mass plot



$t \geq 10$ で達成？

(エラーバーの範囲で達成している？)

エラーバーが大きくてよく分からない。

$$C_{NN}(\vec{x}, t) \equiv \langle 0 | T[N(\vec{x}, t)N(\vec{0}, t) \bar{N}(\vec{0})\bar{N}(\vec{0})] | 0 \rangle$$

$$= \sum_n A_n e^{-E_n t} \psi_n(\vec{x})$$

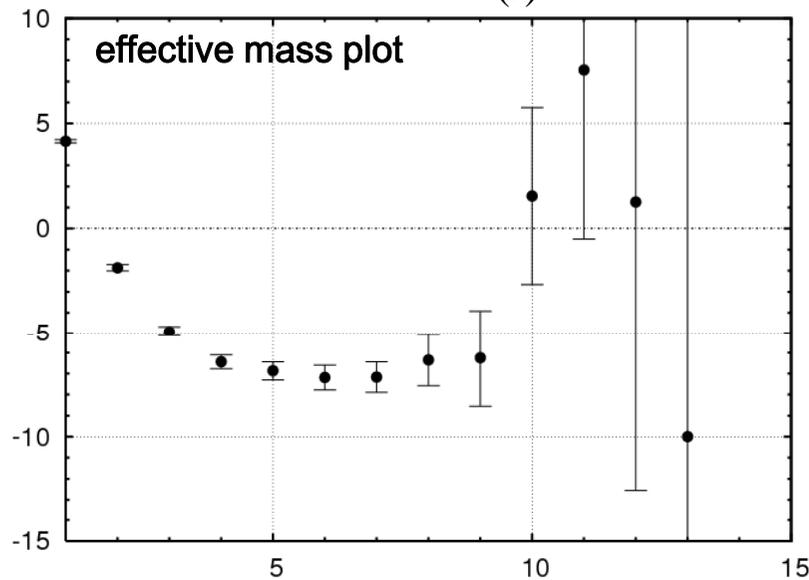
ground state energyの決定

(24)

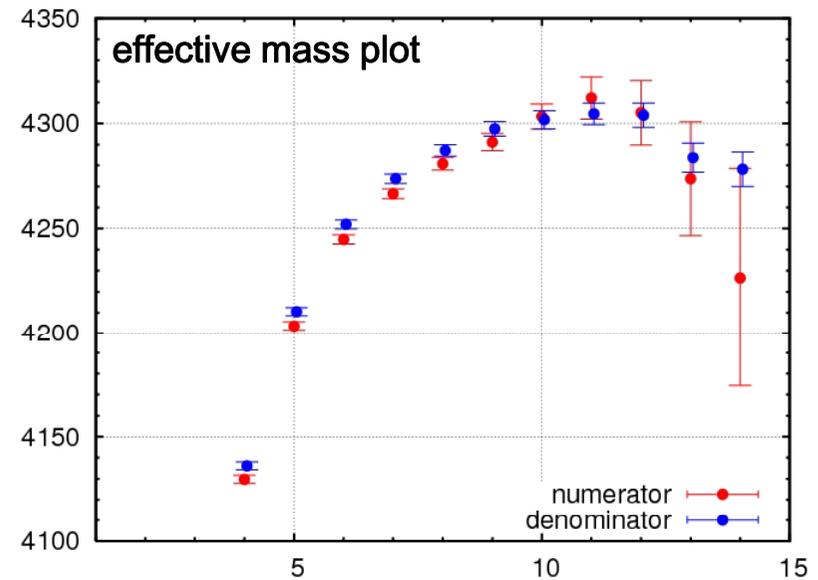
- BS波動関数 [wall source]
長距離部の振る舞いから決定可能であるが、
現在長距離部が収束していないため使えない。

- $R(t)$ [wall source]

$$R(t) \equiv \frac{N(t)}{D(t)}$$



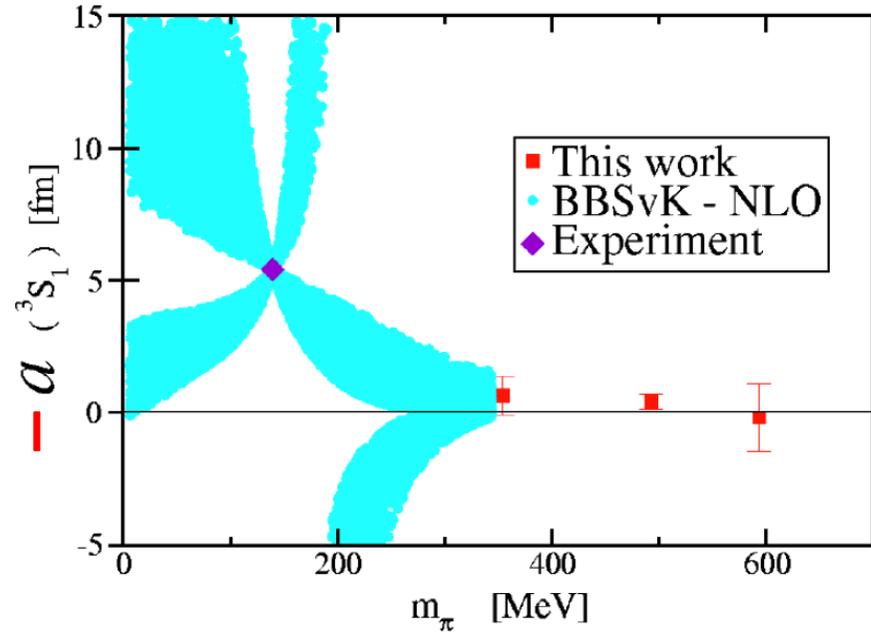
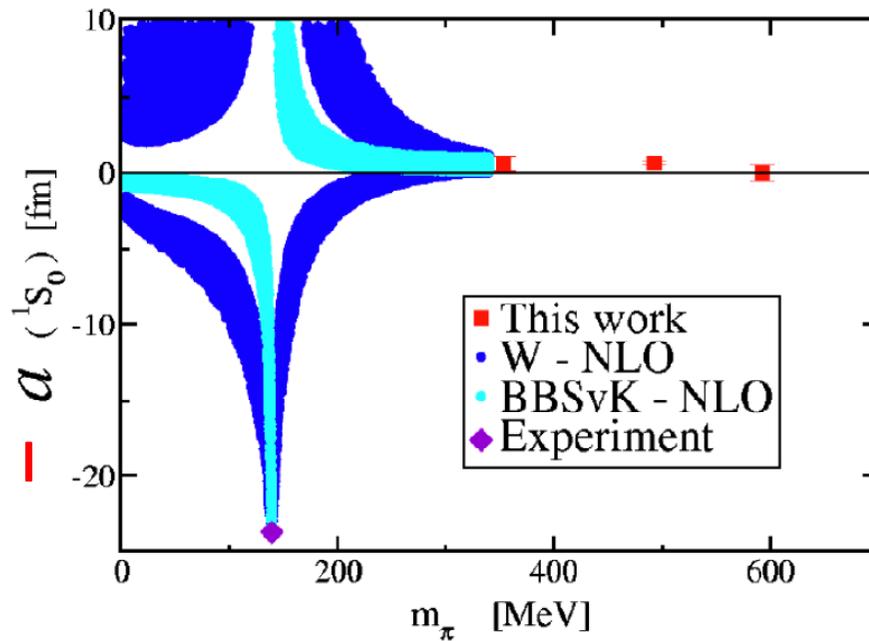
$$N(t) \equiv \sum_{\vec{x}} G_{NN}(\vec{x}, t) \quad D(t) \equiv \left(\sum_{\vec{x}} G_N(\vec{x}, t) \right)^2$$



分子と分母を別々に見たとき、 $t \geq 10$ でplateauに達しているが、
その領域で比 $R(t)$ はノイズが大きくて使い物にならない。

Scattering length (quark mass dependence II)

(25)



NPLQCD, PRL97,012001(2006).

- Nuclear effective theory with KSW coupling
- Repulsive scattering length